



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

평형 유동을 고려한 스파크 제트
액추에이터 유동 해석 모델 개발

Development of Spark Jet Actuator Flow Analysis
Model considering Equilibrium Flow

2018 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

신 진 영

평형 유동을 고려한 스파크 제트 액츄에이터 유동 해석 모델 개발

Development of Spark Jet Actuator Flow Analysis
Model considering Equilibrium Flow

지도교수 김 규 홍

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함

2018 년 6 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

신 진 영

신진영의 공학석사 학위논문을 인준함

2018 년 8 월

위 원 장 _____

부위원장 _____

위 원 _____

국문 초록

평형 유동을 고려한 스파크 제트 액추에이터 유동 해석 모델 개발

신 진 영

기계항공공학부 우주항공공학과

서울대학교

본 연구에서는 active 액추에이터의 일종인 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 유동 해석 모델을 개발하였다. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터를 구동시키는 아크 플라즈마의 characteristic time 과 유동의 characteristic time 의 큰 차이로 인해 발생하는 지나친 computational cost 를 줄이기 위해 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 jet boundary condition 을 도출해 낼 수 있는 analytic model 이 필요하다. 액추에이터의 기하학적 대칭성과 액추에이터 내부에서 발생하는 여러 충격파의 기하학적 특징들을 고려하여 변환시킨 지배방정식을 이용하여 제트 경계조건 모델을 도출하였다. 그리고 이렇게 도출된 경계조건 모델을 실제 벽면 경계조건으로 부여하여 수치해석을 하고 참고문헌의 실험 결과와 비교하여 잘 일치하는 결과를 얻었다. 한편, 스파크 제트 플라

즈마 액추에이터는 고온, 고압 유동이므로 local thermal equilibrium 가정을 통해 평형 유동으로 가정하였고 평형 상태의 열역학적 물성치를 계산하기 위해 NASA 의 CEA open source 를 사용하였다

키워드 : 스파크 제트 플라즈마 액추에이터, 액티브 액추에이터, 제트 경계 조건 모델, 평형 유동

학 번 : 2016-20741

목 차

국문 초록.....	1
목 차	iii
그림 목차.....	v
표 목차.....	viii
1. 서 론	1
1.1 연구 목적	1
1.2 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터.....	2
2. 물리 모델	5
2.1 평형 기체	5
2.2 유동 지배 방정식	7
2.3 플라즈마 Joule heating energy 모델	8
3. 수치 기법.....	11
3.1 공간 차분 기법.....	11
3.2 시간 차분 기법.....	13
4. 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 해석 모델	14
4.1 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 형상.....	14

4.2 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 초기조건	15
4.3 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 모델 개발을 위한 CFD 분석	16
4.4 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 모델링 격자계	21
4.5 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 모델 개발	22
4.5.1 유동해석 프로그램 검증	24
4.5.2 지배방정식 변환	29
4.5.3 반사파 모사	36
4.5.4 반사파 주기 계산	50
4.5.5 Jet boundary condition 모델	53
5. 결 론	58
6. 참고 문헌	60
Abstract	62

그림 목차

그림 1. Active 액추에이터를 이용한 유동 제어 예시	2
그림 2. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 형상 및 작동 원리.....	3
그림 3. 압력에 따른 전자와 무거운 입자의 온도.....	4
그림 4. CEA 로부터 계산된 열역학적 물성치 테이블	6
그림 5. CEA 로부터 계산된 열역학적 물성치 검증	7
그림 6. 스파크 제트 액추에이터의 전극 양단에서 측정된 전압과 RLC 모델을 통해 예측한 플라즈마 모델에서 계산된 전압	10
그림 7. 시간에 따른 플라즈마로부터 유동에 주입되는 에너지	10
그림 8. 스파크 제트 액추에이터 cavity 형상 정보	14
그림 9. 스파크 제트 액추에이터 full scale CFD 격자계	17
그림 10. 5.0 μs 에서의 압력 contour	18
그림 11. 8.5 μs 에서의 압력 contour	18
그림 12. 13.0 μs 에서의 압력 contour.....	18
그림 13. 14.0 μs 에서의 압력 contour.....	18
그림 14. 17.0 μs 에서의 압력 contour.....	18
그림 15. 20.0 μs 에서의 압력 contour.....	18
그림 16. 캐비티 내부의 반사파 예시, 좌 : r 축 반사파, 우: z 축 반사파	19
그림 17. 캐비티 내부의 반사파.....	20
그림 18. 스파크 제트 액추에이터 모델링 격자계	22

그림 19. 1-D Riemann solver 검증	25
그림 20. Cylindrical symmetry Euler equation 수치 해.....	26
그림 21. Spherical symmetry Euler equation 수치 해	26
그림 22. 스파크 제트 액추에이터 모델링 검증을 위한 CFD 격자계.....	28
그림 23. $1.0\mu\text{s}$ 에서 캐비티 내부	28
그림 24. $1.5\mu\text{s}$ 에서 캐비티 내부	28
그림 25. $2.0\mu\text{s}$ 에서 캐비티 내부	28
그림 26. $2.5\mu\text{s}$ 에서 캐비티 내부	28
그림 27. CFD 결과 (z 축)와 모델링 결과(z 축 격자계) 비교, 벽면에 반사되기 전까지의 압력 contour	34
그림 28. CFD 결과 (y 축)와 모델링 결과(r 축 격자계) 비교, 벽면에 반사되기 전까지의 압력 contour	35
그림 29. R 축 격자계에서 충격파의 위치	36
그림 30. 일반 곡선 좌표계	37
그림 31. 일반 곡선 좌표계의 기저벡터가 캐비티 내부에서 정의되는 방향.....	41
그림 32. xy 단면으로 본 스파크 제트 반사파	45
그림 33. xz 단면으로 본 스파크 제트 반사파	47
그림 34. 반사파의 기하학적 형상과 접선 속도 변화량의 관계	49
그림 35. CFD 결과 (z 축)와 반사파 모델링 결과(z 축 격자계) 비교	49
그림 36. CFD 결과 (y 축)와 반사파 모델링 결과(r 축 격자계) 비교	50
그림 37. R 축 격자계에서 충격파의 위치	51
그림 38. R 축 격자계에서 충격파의 위치	51

그림 39. CFD로부터 얻은 오리피스 출구 물리량 (normalized average pressure)	52
그림 40. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 Thrust FFT 결과	53
그림 41. 오리피스 출구 물리량 초반부 확대.....	54
그림 42. Jet boundary condition 도출 과정 예시	54
그림 43. Converging section 초입 부분에서의 압력	56
그림 44. Converging section 초입 부분에서의 밀도	56
그림 45. Converging section 초입 부분에서의 속도	56
그림 46. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 제트 위치 비교	57
그림 47. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 충격량 비교	58

표 목차

표 1. 스파크 제트 액츄에이터 cavity 형상 정보.....	15
-------------------------------------	----

1. 서 론

1.1 연구 목적

뛰어난 공력 성능을 갖는 비행체를 설계하는 것은 항공공학 연구자들의 궁극적인 목표이다. 특히 액츄에이터를 이용하여 항공기의 성능을 향상시키는 연구가 오랫동안 수행되어 왔는데 이러한 액츄에이터는 크게 passive 액츄에이터와 active 액츄에이터로 구분된다. 대표적인 Passive 액츄에이터인 fin, winglet, vortex generator 는 다양한 비행 조건에 대해 능동적으로 반응할 수 없다는 한계가 있다. 최근에는 이러한 한계를 극복하기 위해 synthetic jet, DBD, suction/blowing 같은 active 액츄에이터 연구가 수행되고 있다. Active 액츄에이터의 능동적인 반응 특성으로 인해 다양한 비행 조건에 대한 유연한 제어의 가능성이 높아져 이를 통한 비행체 공력 특성 향상을 위한 연구가 활발히 진행되고 있다.

플라즈마 액츄에이터를 이용한 유동 제어 기법은 기존의 돌출형 작동면을 가지는 유동제어 기법과 달리 구조가 간단하고 벽면에 매립이 가능하기 때문에 고속, 고온 환경에서 높은 내구성을 가진다는 장점이 있다. 또한 기계적 구동 메커니즘 없이 전기적 신호를 통해 제어하므로 응답속도가 빠르며 고전력 입력을 통한 높은 모멘텀 및 높은 에너지 출력이 가능하므로 향상된 제어력을 가질 것으로 예상된다.

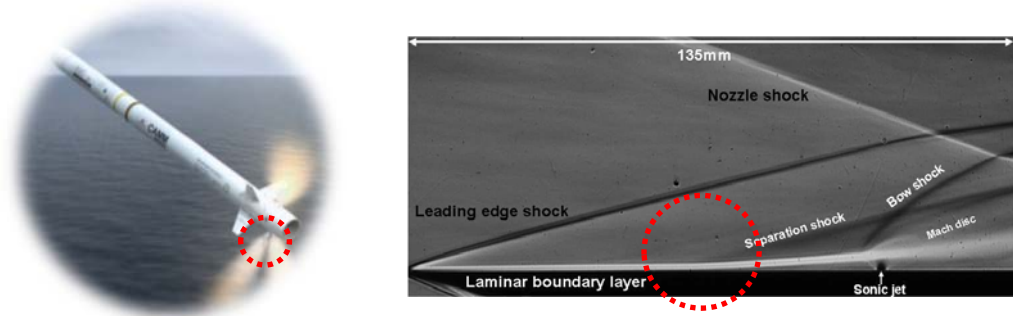


그림 1. Active 액츄에이터를 이용한 유동 제어 예시

1.2 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터

본 연구는 active 액츄에이터의 일종인 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터를 사용하였다. 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터는 캐비티 내부에 위치한 두 전극 사이에 전압을 인가하여 아크 플라즈마를 발생시킨 뒤 아크 플라즈마에 의한 joule heating 에너지가 유동에 주입되면서 유동이 캐비티 바깥으로 분출되고 이렇게 형성된 제트가 외부 유동에 모멘텀을 공급하는 방식으로 유동을 제어한다. 상온 상압의 좁은 캐비티 내에서 방전을 시키면 수 μs 정도의 매우 짧은 시간에 플라즈마가 형성되는데 짧은 시간 동안 상당한 에너지를 얻은 유동은 고온 고압의 상태가 되면서 충격파를 동반한 강한 제트를 분출한다. 캐비티 내부의 한정된 유량 때문에 시간이 흐를수록 제트 분출량은 감소한다. 그리고 어느 순간부터는 다시 외부로부터 유동이 유입되는 refresh 단계로 돌입한다. 이러한 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터의 특성을 ZNMF(Zero Net Mass Flow)라고 한다.

그림 2의 좌측에서 본 연구에서 사용한 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터

형상을 확인할 수 있다. 본 연구에서 사용한 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 형상은 캐비티와 오리피스가 Converging section 으로 연결되어 있고 캐비티 내부에 양극과 음극이 위치해 있다. 그림 2 의 우측은 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 작동 원리를 확인 할 수 있다. 전압이 인가된 초기에는 에너지가 deposition 되면서 방전이 시작되고 제트가 분출되다가 캐비티 내부의 한정된 유량에 의해서 시간이 지나면 refresh 상태가 된다.

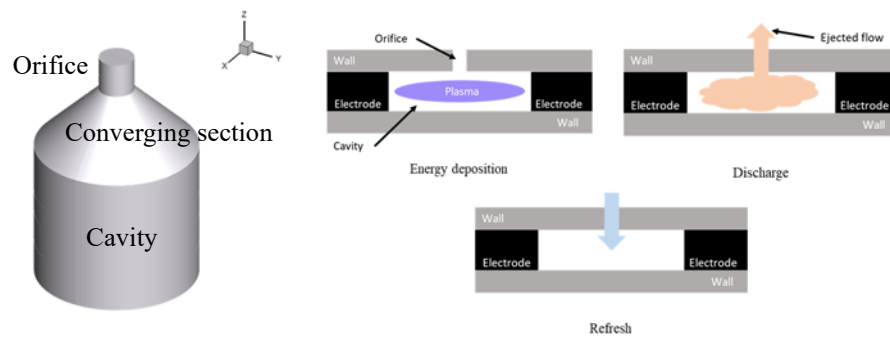


그림 2. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 형상 및 작동 원리

스파크 제트 플라즈마 액추에이터는 아크 플라즈마에 의한 joule heating 에너지가 유동에 주입되면서 유동의 압력과 온도가 급격히 상승하는데, 높은 온도에서는 공기의 화학반응을 고려해야 한다. 또한, 플라즈마의 압력에 따라 전자와 이온 그리고 중성입자가 갖는 온도가 달라지는데, 낮은 압력에서는 전자 온도가 다른 무거운 입자의 온도보다 훨씬 높지만 높은 압력에서는 전자와 다른 무거운 입자의 온도가 같아진다. 이는 압력이 높을수록 입자간의 충돌이 활발해져 입자간의 모멘텀 및 에너지 전달이 매우 빈번해지기 때문이다. 전자와 무거운 입자 간의 충돌에 의한 모멘텀 및 에너지 전달은 전자의 가벼운 질

량 때문에 상당히 적은 양이 전달되지만 이러한 충돌의 빈도가 매우 잦아지면 결국에는 두 종류의 입자의 온도가 같아지게 된다. 참고문헌 [4]에서는 이러한 입자 온도의 변화를 확인 할 수 있는 그래프를 제시하였다. 그림 3 이 참고문헌 [4]에서 제시한 압력에 따른 전자와 무거운 입자의 온도 변화 및 온도 차이 그래프이다. 그래프 상에서 상압으로 여겨지는 10^2 kPa 에서는 전자 온도와 무거운 입자의 온도가 거의 같음을 알 수 있다. 이와 같은 상태를 Local Thermal Equilibrium 가정이라고 한다. 또한, local thermal equilibrium 은 유동의 characteristic time 보다 화학반응의 characteristic time 이 훨씬 짧다는 것을 의미하므로 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터는 평형 유동의 지배를 받는다고 생각할 수 있다.

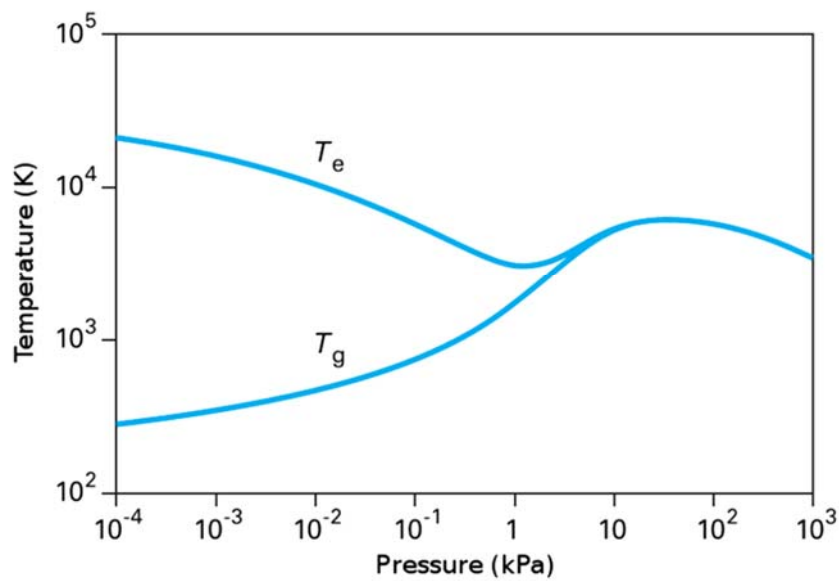


그림 3. 압력에 따른 전자와 무거운 입자의 온도 ⁴

2. 물리 모델

2.1 평형 기체

스파크 제트 플라즈마 액추에이터는 local thermal equilibrium 가정에 의해 평형 유동의 지배를 받는다. 평형 유동은 유동의 characteristic time 보다 화학 반응의 characteristic time 이 훨씬 짧아서 매 순간마다 유동이 이미 화학적 평형 상태에 도달하였다고 가정하는 것이다. 평형 유동은 모든 열역학적 물성치를 압력과 온도 혹은 밀도와 내부에너지와 같은 두개의 상태 변수의 함수로 나타낼 수 있다.

수치 해석을 수행하는 동안 평형 상태의 열역학적 물성치를 계산하기 위해서는 $n+1$ 번째 time step 에서 계산된 conservative vector 에서 얻은 밀도와 내부 에너지를 독립변수로 하여 Helmholtz energy minimization 을 통해 나머지 물성치들을 계산해야 한다. 그러나 이와 같은 계산을 매 computational time step 에 대해 수행하는 것은 불가능하다. 이러한 이유로 인해 다양한 reference 에서 공기의 평형 상태 물성치에 대한 보정식이나 table 을 제공하고 있다. 본 연구에서는 참고문헌 [1]에서 제공하는 소스코드를 기반으로 계산한 평형 물성치들을 미리 table 로 만든 다음에 유동 해석이 진행되는 매 time step 마다 필요한 열역학적 물성치들을 table 로부터 interpolation 하는 방식으로 수치 연구를 수행하였다.

참고문헌 [1]은 임의의 화학종에 대한 화학 평형 상태를 계산할 수 있는 NASA 의 오픈 소스이다. Gibbs energy minimization 혹은 Helmholtz energy minimization 을 통해 각 화학종의 mole fraction 을 계산한 뒤 specific heat, heat

of formation, entropy 를 온도의 함수로 fitting 한 보정식의 계수를 제공된 thermo.inp 에서 불러들여 나머지 열역학적 물성치들을 계산한다. 본 연구에서는 수치적으로 계산된 유동장에서 필요한 압력, 온도, 밀도, 내부 에너지 범위와 각각의 증가폭을 산정한 뒤 이 범위에 대한 모든 열역학적 물성치를 CEA 소스코드로부터 테이블의 형태로 얻었다 (그림 4). 그 후, 이 테이블로부터 수치해석에 요구되는 압력/온도 혹은 밀도/에너지 순서쌍을 interpolation 하여 나머지 물성치들을 계산하였다. 그림 5 는 CEA table 과 참고문헌 [2]를 비교하여 CEA 소스코드로부터 계산된 물성치를 검증한 결과이다.

T [K]	P [bars]	rho [kg/m ³]	E [kJ/kg]	H [kJ/kg]	h ₀ [kJ/(kg-mol)]	C _p [kJ/(kg·K)]	gamma	mu _{0,1} [m/s]	viscosity [millipoise]	conductivity [W/(cm·K)]	Pr
238											
200.00	109.0000000000	139.0400000000	-5997.40	-5931.40	29.75400	1.05770	1.35900	278.59000	0.11119	0.14781	0.70084
220.00	109.0000000000	177.3200000000	-5971.00	-5921.20	29.75400	1.04930	1.35370	280.48000	0.12213	0.15011	0.71014
240.00	109.0000000000	142.5400000000	-5955.80	-5888.80	29.75400	1.06140	1.34830	300.70000	0.13099	0.15099	0.73036
260.00	109.0000000000	130.0200000000	-5939.70	-5847.00	29.75400	1.09440	1.34280	312.33000	0.14078	0.15099	0.73720
280.00	109.0000000000	139.3200000000	-5921.20	-5845.00	29.75400	1.10220	1.33720	321.45000	0.15038	0.15038	0.74331
300.00	109.0000000000	130.0200000000	-5904.50	-5822.70	29.75400	1.12220	1.33150	334.09000	0.15987	0.15987	0.74948
320.00	109.0000000000	121.9000000000	-5889.50	-5800.10	29.75400	1.13640	1.32600	344.33000	0.16921	0.16921	0.75490
340.00	109.0000000000	114.7500000000	-5872.20	-5777.20	29.75400	1.15140	1.32040	354.18000	0.17841	0.17841	0.76033
360.00	109.0000000000	108.3400000000	-5854.60	-5754.00	29.75400	1.16650	1.31500	363.70000	0.18745	0.18745	0.76516
380.00	109.0000000000	101.4600000000	-5834.70	-5730.40	29.75400	1.18200	1.30940	372.90000	0.19635	0.19635	0.76947
400.00	109.0000000000	97.5220000000	-5811.50	-5704.80	29.75400	1.19770	1.30440	381.82000	0.20510	0.20510	0.77327
420.00	109.0000000000	92.8780000000	-5800.00	-5682.70	29.75400	1.21370	1.29920	390.45000	0.21371	0.21371	0.77650
440.00	109.0000000000	88.4830000000	-5781.20	-5658.20	29.75500	1.22920	1.29420	398.39000	0.22218	0.22218	0.77904
460.00	109.0000000000	84.7880000000	-5762.00	-5633.40	29.75500	1.24720	1.28920	407.05000	0.23051	0.23051	0.78181
480.00	109.0000000000	81.2420000000	-5742.50	-5608.30	29.75400	1.26500	1.28430	415.04000	0.23872	0.23872	0.78462
500.00	109.0000000000	78.0070000000	-5722.40	-5582.80	29.75200	1.28350	1.27940	422.31000	0.24681	0.24681	0.78754
520.00	109.0000000000	75.0010000000	-5702.30	-5557.00	29.74900	1.30330	1.27450	430.35000	0.25477	0.25477	0.79053
540.00	109.0000000000	72.2130000000	-5681.60	-5530.70	29.74600	1.32430	1.26940	437.77000	0.26262	0.26262	0.79209
560.00	109.0000000000	69.4240000000	-5660.50	-5504.00	29.74100	1.34740	1.26470	444.97000	0.27036	0.27036	0.79302
580.00	109.0000000000	67.2390000000	-5639.00	-5476.80	29.73500	1.37310	1.25970	452.00000	0.27799	0.27799	0.69268
600.00	109.0000000000	64.9510000000	-5616.90	-5449.00	29.72700	1.40170	1.25460	458.85000	0.28553	0.28553	0.69754
620.00	109.0000000000	62.6320000000	-5594.20	-5420.70	29.71500	1.43430	1.24930	465.52000	0.29296	0.29296	0.69877

그림 4. CEA 로부터 계산된 열역학적 물성치 테이블

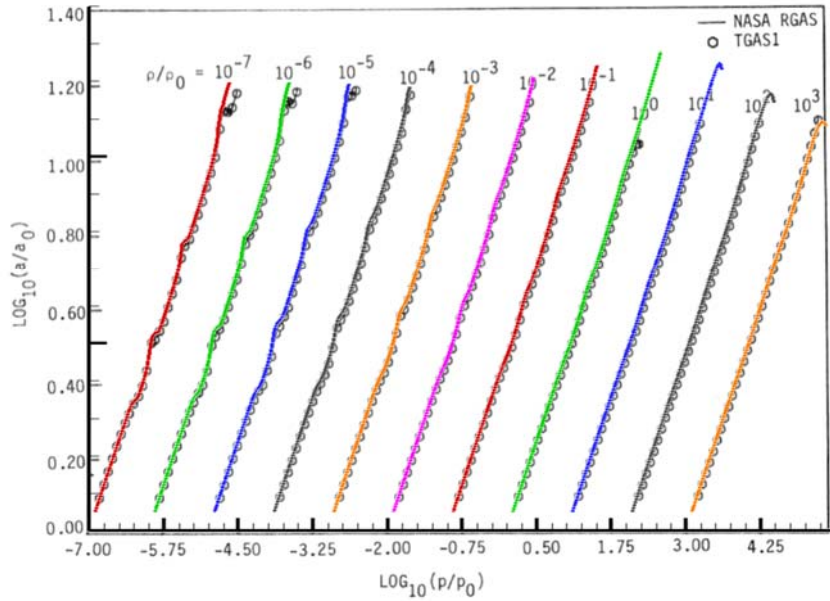


그림 5. CEA로부터 계산된 열역학적 물성치 검증

2.2 유동 지배 방정식

스파크 제트 플라즈마 액츄에이터는 평형 유동의 지배를 받으므로 평형 유동에 대한 지배방정식을 사용한다. 평형 유동에 대한 지배방정식은 동결 유동에 대한 지배방정식과 동일하다. 그러나 동결 유동에서 사용하는 이상기체 상태방정식이나 Sutherland law 등은 더 이상 사용하지 못하고 CEA table 에서 interpolation 된 열역학적 물성치를 사용해야 한다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} + \frac{\partial G_v}{\partial z} + S$$

$$= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_t \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e_t + p)u \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho e_t + p)v \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho e_t + p)w \end{bmatrix}$$

$$E_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ -q_x + \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w \end{bmatrix} \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ -q_y + \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w \end{bmatrix}$$

$$G_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ -q_z + \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_{plasma} \end{bmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$$q_i = k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

여기서 Q_{plasma} 는 Joule heating 에너지에서 화학반응 에너지와 복사 에너지가 제외된 순수하게 유동에 주입된 에너지를 의미한다. Q_{plasma} 에 대한 자세한 설명은 다음 절에 있다.

2.3 플라즈마 Joule heating energy 모델

2.2 절에서 언급되었던 Q_{plasma} 는 아크 플라즈마가 가지고 있는

Joule heating energy 에서 플라즈마를 유지하는데 필요한 화학반응에 사용되는 에너지와 전자기파에 의해 방출되는 복사 에너지가 제외된, 순수히 유동에만 주입되는 에너지를 의미한다. 아크 플라즈마의 화학 반응이 모두 고려된 플라즈마 모델과 복사 에너지에 대한 모델이 있다면 Q_{plasma} 를 직접 계산할 수 있으나 아크 플라즈마의 화학 반응은 아직 잘 알려지지 않았기 때문에 정확한 Q_{plasma} 를 얻기가 어렵다.

참고 문헌 [3]에 의하면 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 실험에서 전극 양단의 전위를 측정하였을 때 그림 6 과 같이 exponentially decaying 하는 sine wave 가 측정되었다. [3]에서는 이를 두 전극 사이에서 발생한 아크 플라즈마가 RLC 회로의 특성을 갖기 때문이라고 설명하였고 이에 따라 스파크 제트 플라즈마 액추에이터에서 발생한 아크 플라즈마를 RLC 회로에 기반을 둔 등가회로로 치환한 플라즈마 모델을 개발하였다. 참고 문헌 [4]와 [5]도 역시 RLC 등가회로로부터 플라즈마 모델을 만들고 여기서 계산된 전류, 전기 전도도로부터 joule heating energy 를 계산하고 이를 in-house 유동 solver 에 energy source term 으로 추가하여 스파크 제트 플라즈마 액추에이터를 수치해석 하였다. 따라서 본 연구에서는 참고 문헌 [3] 에서 제시된 Q_{plasma} 를 보정식으로 fitting 하여 본 유동 해석 solver 에 energy source term 으로 추가하여 스파크 제트 플라즈마 액추에이터에 대한 수치 연구를 진행하였다. 그림 7 은 보정식으로 fitting 된 Q_{plasma} 이다.

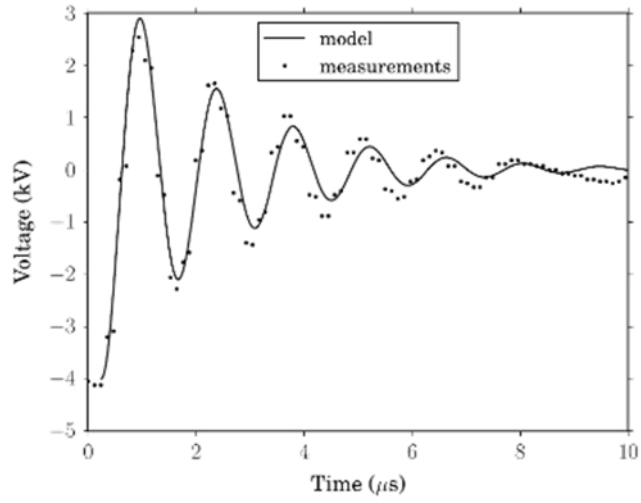


그림 6. 스파크 제트 액추에이터의 전극 양단에서 측정된 전압과 RLC 모델을 통해 예측한 플라즈마 모델에서 계산된 전압 ³

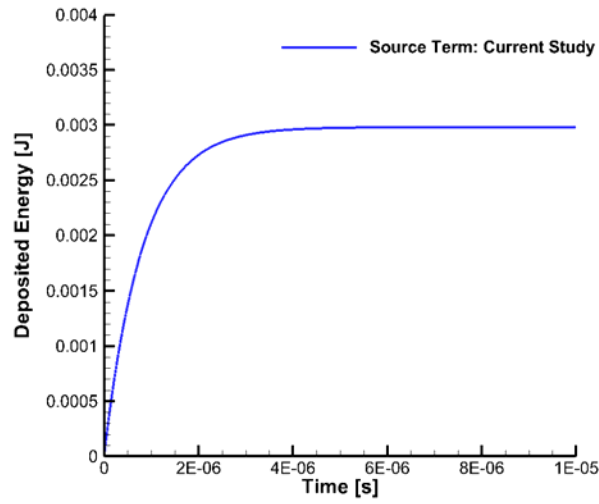


그림 7. 시간에 따른 플라즈마로부터 유동에 주입되는 에너지 ³

$$Q_{plasma} = 0.003(1 - e^{-1,2350(\frac{t}{10^6})})$$

3. 수치 기법

3.1 공간 차분 기법

공간 차분 기법으로는 AUSMPW+를 사용하였다[6]. 기존의 대표적인 Hybrid scheme 중 하나인 AUSM+ 는 강한 충격파 후방과 벽면 근처에서 비물리적인 진동을 발생시키는 단점이 있다. 이는 cell interface 를 기준으로 한 쪽 방향의 물리량만 고려하였기 때문에 강한 충격파 후방에서 진동을 발생 하는 것이며 벽면 근처에서 마하수가 0 에 가까워지면 수치점성이 거의 0 이 되기 때문에 벽면 근처에서 진동이 발생하는 것이다. 그러나 AUSMPW+는 pressure based weighting function 을 도입하여 충격파의 위치를 찾은 다음 충격 파 근처에서는 cell interface 를 기준으로 왼쪽과 오른쪽의 물리량을 모두 고 려하였기 때문에 수치 진동을 야기하지 않으며 벽면에서 약간의 수치점성을 추가하여 벽면에서의 비물리적인 진동도 제거하였다. 한편, AUSM 계열의 scheme 들은 밀도, 압력과 같은 스칼라 물리량에 대해 positivity preserving 을 만족하기 때문에 화학반응이 있는 유동에서 매우 유리하지만 스파크 제트 플라즈마 액추에이터는 table 에서 interpolation 된 평형 물성치를 사용하기 때문에 이와 같은 특성은 그다지 의미가 크지 않다. 1 차원 유동에서 AUSMPW+ 기법을 적용하여 계산한 플럭스 함수는 다음과 같다.

$$F_1 = \overline{M}_L^+ c_1 \Phi_L + \overline{M}_R^+ c_1 \Phi_R + (P_L^+ \mathbf{P}_L + P_R^- \mathbf{P}_R)$$

$$\Phi = (\rho, \rho u, \rho H)^T, P = (0, p, 0)^T$$

여기서 밑첨자 $\frac{1}{2}, L, R$ 는 각각 cell interface, cell interface 왼쪽, cell interface 오

른쪽을 의미한다. Cell interface 마하수는 다음과 같이 정의된다.

$$m_{\frac{1}{2}} = M_L^+ + M_R^-$$

$$(i) \quad m_{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$\overline{M}_L^+ = M_L^+ + M_R^- \cdot [(1-w) \cdot (1+f_R) - f_L]$$

$$\overline{M}_R^- = M_R^- \cdot w(1+f_R)$$

$$(ii) \quad m_{\frac{1}{2}} < 0$$

$$\overline{M}_L^+ = M_L^+ \cdot (1+f_L)$$

$$\overline{M}_R^- = M_R^- + M_L^+ \cdot [(1-w) \cdot (1+f_L) - f_R]$$

Pressure based weighting function, f 와 w 는 다음과 같다.

$$w(p_L, p_R) = 1 - \min\left(\frac{p_L}{p_R}, \frac{p_R}{p_L}\right)^3$$

$$f_{L,R} = \left(\frac{p_{L,R}}{p_s} - 1\right) \times \min\left(1, \frac{\min(p_{1,L}, p_{1,R}, p_{2,L}, p_{2,R})}{\min(p_L, p_R)}\right)^2, \quad p_s \neq 0$$

$$p_s = P_L^+ p_L + P_R^- p_R$$

그리고, 마하수 분할 함수와 압력 분할 함수는 다음과 같다.

$$M^\pm = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M \pm |M|) & |M| > 1 \end{cases}$$

$$P^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)) & |M| > 1 \end{cases}$$

Cell interface 좌우에서의 마하수는 다음과 같다.

$$M_{L,R} = \frac{U_{L,R}}{c_{\frac{1}{2}}}$$

Cell interface 음속, $c_{\frac{1}{2}}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$c_{\frac{1}{2}} = \min\left(\frac{c^{*2}}{\max(|U_L|, c^*)}, \frac{c^{*2}}{\max(|U_R|, c^*)}\right)$$

여기서 critical speed of sound, c^* 는 Prantdl relation 에서 의해 $\sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)H_{normal}}}$ 와 같이 정의된다. H_{normal} 은 다음과 같다. $H_{normal} = 0.5 \times (H_{total,L} - 0.5 \times V_L^2 + H_{total,R} - 0.5 \times V_R^2)$

3.2 시간 차분 기법

시간 차분 기법으로는 3rd-order TVD Runge Kutta method 를 사용하였다. 기존의 4 차 Runge Kutta method 와는 안정성 측면에서 다르다. 3rd-order TVD Runge Kutta method 는 시간에 대한 total variation 이 감소하여 local maxima 와 local minima 를 만들지 않도록 계수가 조정되었으며 4 단계의 sub iteration 횟수를 3 단계로 줄여 computation cost 도 단축되는 장점이 있다.

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^n) \\ u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}) \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \end{aligned}$$

4. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 해석 모델

4.1 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 형상

스파크 제트 플라즈마 액추에이터 형상은 1.2 절에서 이미 언급이 되었지만 그림 8의 구체적인 형상 정보와 함께 다시 서술하고자 한다.

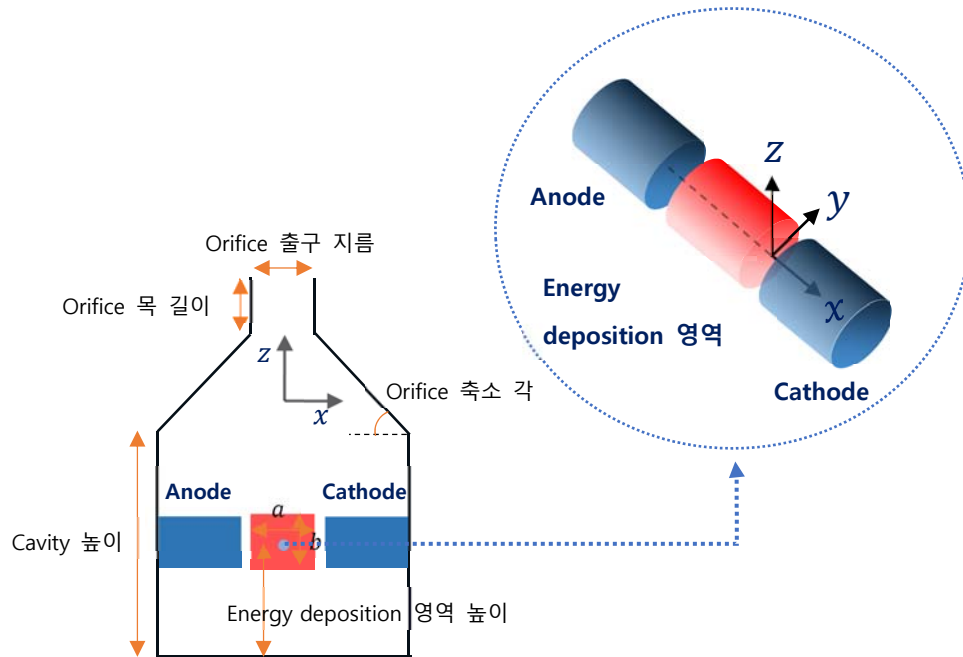


그림 8. 스파크 제트 액추에이터 cavity 형상 정보

표 1. 스파크 제트 액추에이터 cavity 형상 정보

형상 변수	수치
Orifice 출구 지름	1 mm
Orifice 목 길이	4 mm
Orifice 축소 각	45 deg
Cavity 지름	4.0 mm

Cavity 높이	4.6 mm
Energy deposition 영역 (a×b)	1.2 mm × 1.0 ϕ

표 1 은 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 구체적인 수치를 제시하였다. 캐비티와 오리피스는 z 축을 대칭으로 하는 cylinder 형상이며 converging section 도 z 축에 대칭이지만 cylinder 형상이 아닌 잘린 원뿔 형상이다. 한편, Orifice 출구 지름은 1 mm 이며 Cavity 지름은 4.6 mm 이다. 그리고 원통형의 전극이 캐비티 벽면으로부터 돌출되어 1.2mm 간격을 두고 위치해 있으며 이 두 전극 사이가 아크 플라즈마가 생성되고 소멸하는 energy deposition 영역이다. Energy deposition 영역은 x 축을 대칭으로 하는 cylinder 형상으로 전극 형상에 영향을 받는다. Energy deposition 영역의 높이는 캐비티 바닥으로부터 2 mm 떨어져 있다.

4.2 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 초기조건

스파크 제트 플라즈마 액추에이터를 수치해석 하기 위해서 local thermal equilibrium 가정을 적용하였으나 참고문헌 [7]에 의하면 800K 의 회전온도와 3,100K 의 진동온도가 분광 측정에 의해 확인되었다. 이에 따라 실제 스파크 제트 플라즈마 액추에이터는 비평형성이 존재하는 것을 알 수 있다. 방전 초기의 비평형성은 유동의 온도와 압력을 결정하는데 중요한 역할을 한다. 같은 에너지가 주입되었을 때 비열이 클수록 온도 변화가 작으므로 비열이 가장 큰 평형 유동 일 때 온도 변화가 가장 작고 비열이 가장 작은 동결 유동 일 때 온도 변화가 가장 크다. 따라서 유동장 전체를 평형 유동으로 가정하고 수치

해석을 하면 실제 실험에서 측정된 온도보다 낮은 온도가 계산된다. 따라서 동결 유동의 비열보다 크고 평형 유동의 비열보다 작은 비평형 유동의 비열을 사용해야 실제 플라즈마를 모사할 수 있다. 그러나 아크 플라즈마의 화학반응은 아직 알려지지 않은 부분이 많기 때문에 시뮬레이션으로는 이를 구현할 수 없다. 따라서 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 비평형 상태를 구현하기 위해서는 아크 플라즈마 초기 조건을 부여한 상태에서 수치해석을 수행해야 한다. 참고 문헌 [4]에 의하면 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 수치해석을 수행하기 위해 7,500K 의 온도 초기 조건과 $31\text{atm}/0.04\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 의 압력/밀도 초기 조건을 미리 부여한다. 따라서 본 연구에서도 804,606Pa 의 압력 초기 조건과 3,000K 의 온도 초기 조건을 energy deposition 영역에 미리 부여한 뒤 수치해석을 수행한다. 플라즈마 영역을 제외한 나머지 영역은 300K 의 온도, 101,325Pa 의 압력과 마하수 0 을 부여한다.

4.3 스파크 제트 액추에이터 모델 개발을 위한 CFD 분석

스파크 제트 플라즈마 액추에이터 모델 개발을 위해서 우선 캐비티, converging section, 오리피스 뿐만 아니라 외부 유동까지 모두 포함한 full scale CFD 수치해석 결과를 분석해야 한다. Full scale CFD 수치해석을 위해 사용된 격자계는 그림 9 와 같고 캐비티의 수치는 표 1 과 같다. 대기 및 플라즈마 초기 조건은 4.2 절에서 서술한 값과 동일한 값을 부여하였다.

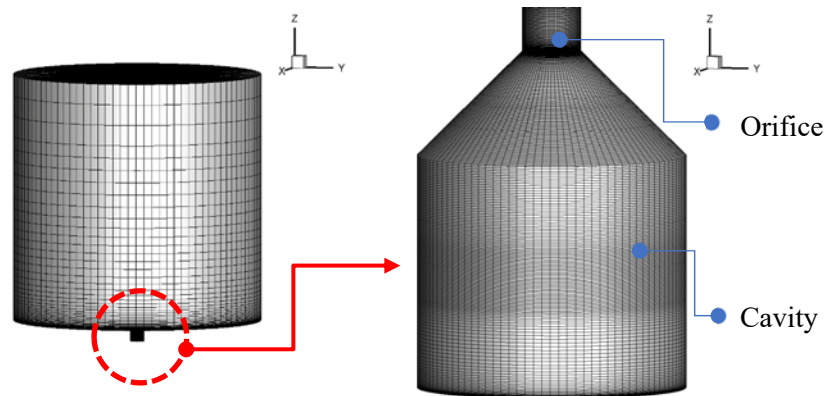


그림 9. 스파크 제트 액츄에이터 full scale CFD 격자계

캐비티 내부에서 유동이 어떻게 거동하는지 분석하기 위해 몇 개의 압력 contour 를 도시하였다. 그림 10 – 15 는 각각 다양한 시간대에서의 압력 contour 이다. Energy deposition 영역에 주어진 높은 플라스마 초기 압력과 높은 플라스마 초기 온도에 의해 사방으로 퍼져나간 blast wave 가 벽면에 반사되어 서로 중첩되고 있다. 중첩 현상은 대부분 대칭축인 z 축 상에서 발생하며 중첩 현상 이후에는 z 축 상에서 높은 강도의 압력이 야기되며 새로운 반사파가 형성되어 다시 캐비티 벽면을 향해 전파된다. 따라서 캐비티 내부 유동은 반복적인 형태를 보이며 매 순간 일정하지는 않지만 어느 정도의 주기성을 갖고 있는 것을 알 수 있다. 한편, converging section 에 도달한 충격파도 역시 벽면에 반사되고 다시 중심에서 모이는 특징을 보이지만 단면적이 점점 줄어들기 때문에 반복되는 주기가 점점 빨라진다. 이는 캐비티 내부 유동 현상을 매우 복잡하게 만드는 요인이 된다.

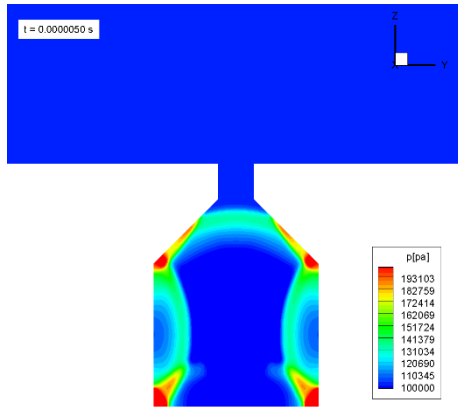


그림 10. 5.0 μs 에서의 압력 contour

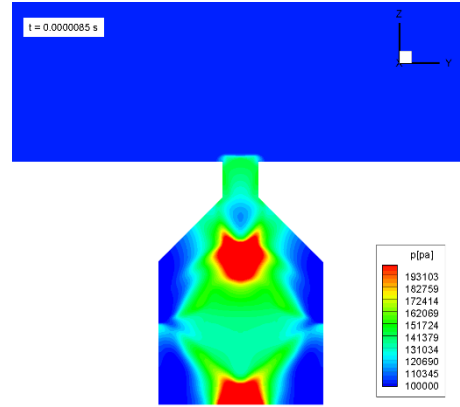


그림 11. 8.5 μs 에서의 압력 contour

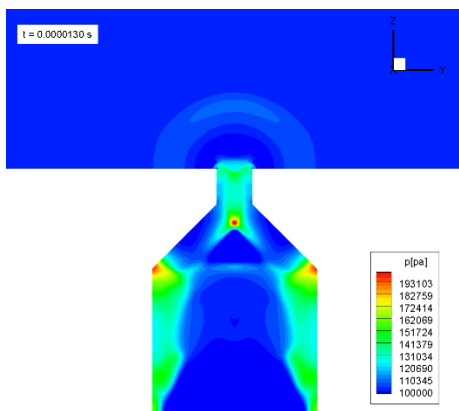


그림 12. 13.0 μs 에서의 압력 contour

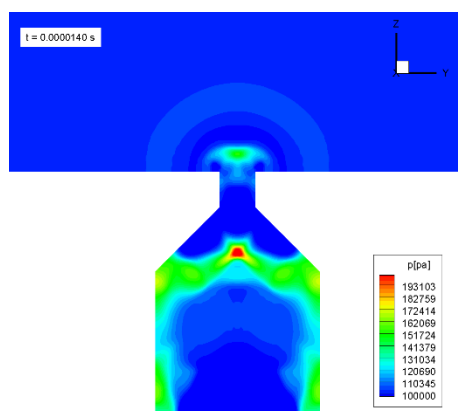


그림 13. 14.0 μs 에서의 압력 contour

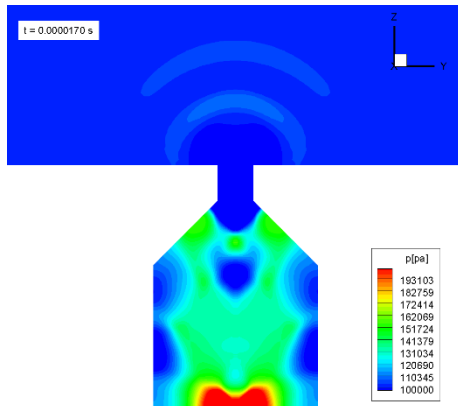


그림 14. 17.0 μs 에서의 압력 contour

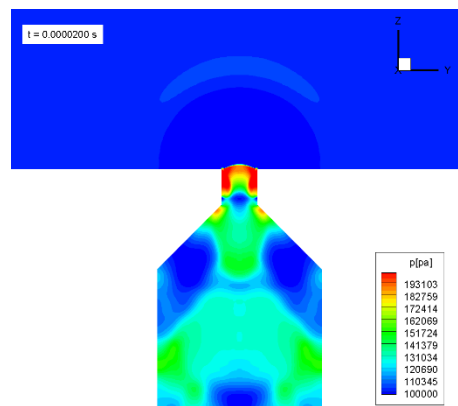


그림 15. 20.0 μs 에서의 압력 contour

한편, 캐비티 내부의 주기성에 가장 큰 영향을 미칠 수 있는 요인을 알아보기 위해서 캐비티 내부 반사파의 기하학적 형태를 고찰하였다. 캐비티의 중심에 있는 energy deposition 영역에서 캐비티 벽면으로 전파되는 blast wave 는 벽면에 충돌하면서 반사되는데 이 때 형성되는 반사파는 그림 16 과 같이 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 그림 16 의 좌측 그림을 r 축 반사파로 정의하고 그림 16 의 우측 그림을 z 축 반사파로 정의하자. R 축 반사파는 캐비티 원통 벽면에 거의 동시에 반사되어 다시 z 축을 향해 모인다. 반면에 z 축 반사파는 캐비티 아랫면에 반사되어 출구를 향해 발산한다. 즉, r 축 반사파는 그림 16 의 좌측과 우측 그림 모두를 참고하면 z 축을 향해 모이는 동시에 출구를 향해 퍼지지만 z 축 반사파는 사방으로 발산할 뿐이다. 따라서 캐비티 내부 유동의 fluctuation 을 야기시키는 요인은 r 축 반사파임을 알 수 있다.

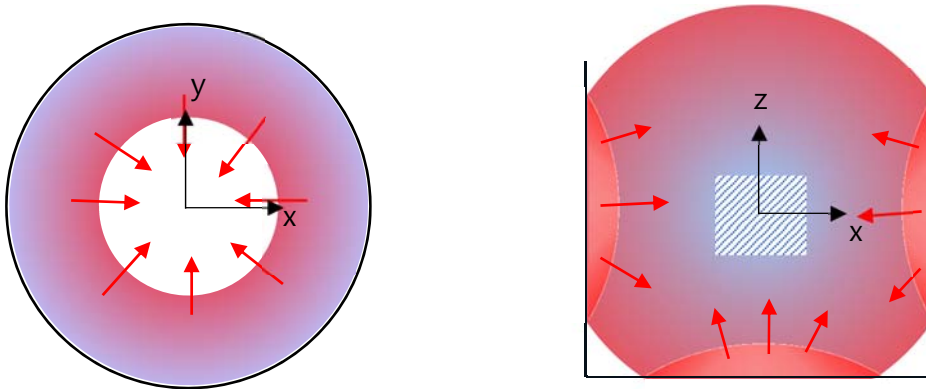


그림 16. 캐비티 내부의 반사파 예시, 좌 : r 축 반사파, 우: z 축 반사파

이를 보다 명확히 확인하기 위해 energy deposition 영역의 위치를 z 축을 따라 옮겨보았다. Energy deposition 영역의 위치가 현재보다 높아지면 r 축 반사파에 의해 발생하는 유동 교란을 z 축 반사파의 방해 없이 확인할 수 있고

energy deposition 영역의 위치가 현재보다 낮아지면 z 축 반사파에 의해 발생하는 유동 교란을 r 축 반사파의 방해 없이 확인할 수 있기 때문이다. 그림 17은 energy deposition 영역의 위치를 옮겨 r 축 반사파와 z 축 반사파가 캐비티 내부 유동에 미치는 영향을 확인하기 위한 CFD 결과이다.

그림 17의 윗부분 contour는 energy deposition 영역의 높이를 3.0mm로 높였을 때 r 축 반사파가 발생하고 이들이 z 축으로 모이면서 다시 강한 중첩 충격파를 형성하는 것을 보여준다. 한편, 그림 17의 아랫부분 contour는 energy

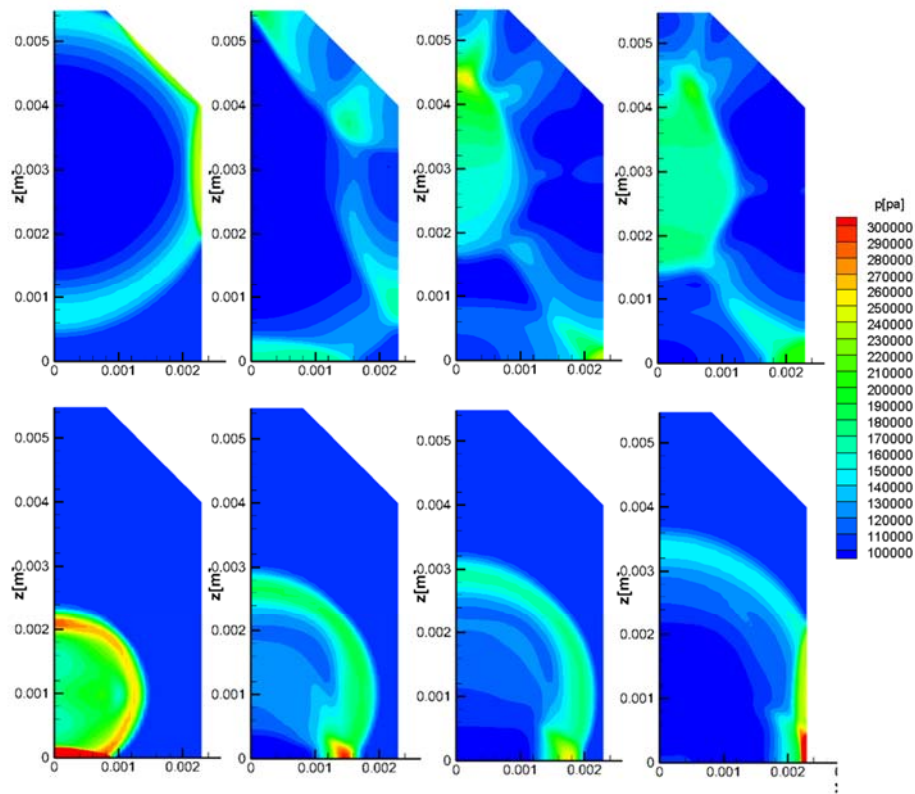


그림 17. 캐비티 내부의 반사파, 상 : energy deposition 높이 3.0mm

하 : energy deposition 높이 1.0mm

deposition 영역의 높이를 1.0mm 로 낮췄을 때 캐비티 아랫면에서 형성된 z 축 반사파가 시간이 흐를수록 발산하여 유동에 큰 영향을 미치지 못하는 것을 보여준다. 이에 따라 그림 16 에서 분석한 것과 같은 결과를 실제 CFD 결과에서도 확인할 수 있었다. 따라서 캐비티 내부 유동의 주기성은 r 축 반사파에 의해 야기된다는 것을 알 수 있다.

4.4 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 모델링 격자계

스파크 제트 플라즈마 액추에이터 해석 모델을 개발하기 전에 모델링 격자계를 선정해야 한다. 4.3 절의 결론에 의하면 캐비티 내부의 유동 현상은 r 축 반사파의 주기에 큰 영향을 받으므로 r 축 반사파를 모사하기 위한 격자계를 선정해야 한다. 그러나 r 축 반사파 만으로는 유동현상을 모사하기 어려우므로 캐비티의 대칭성에 착안하여 z 축 역시 모델링 격자계로 선정해야 한다. 그림 18 의 붉은 선이 이에 해당되며 이 격자계를 z 축 격자계로 명명한다. 한편, r 축 반사파를 모사할 격자계를 선정하기 위해 energy deposition 영역의 중심으로부터 캐비티의 원통형 벽면을 수직으로 잇는 선분을 생각하자. 이러한 선분은 무수히 많으나 유동이 전극을 통과하는 것은 불가능하므로 이 중 일부는 제외된다. 또한, 전극 단면에 평행하고 대칭축을 지나는 평면에 의해 캐비티가 대칭성을 가지는 것에 착안하면 원하는 선분은 하나로 결정된다. 이를 r 축 격자계로 명명하고 그림 18 의 푸른 선이 이에 해당된다.

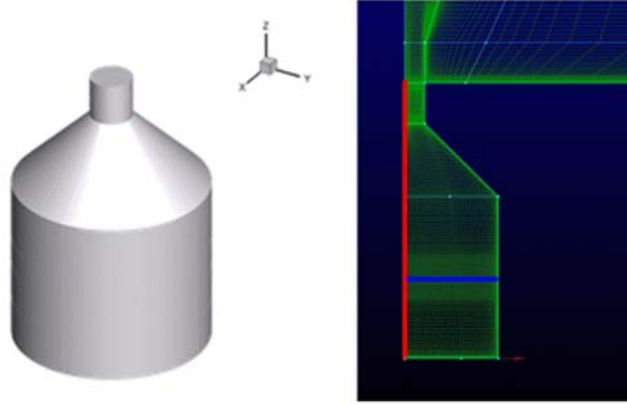


그림 18. 스파크 제트 액추에이터 모델링 격자계

4.5 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 모델 개발

스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 모델을 개발하기 위한 격자계를 선정하였으므로 이제 캐비티 내부 유동을 모사하는 모델을 개발해야 한다. 현재까지 파악된 캐비티 내부 유동의 특징을 정리하면 다음과 같다.

1. 초기 blast wave 가 사방으로 전파
2. Blast wave 가 벽면에 반사되어 z 축 반사파와 r 축 반사파 형성
3. R 축 반사파가 캐비티 내부 유동의 주기를 결정
4. Converging section 과 Orifice 는 유동을 복잡하게 만들지만 전체적인 주기성은 존재

따라서 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 모델링은 다음과 같은 순서로 진행된다.

1. 지배방정식 변환
 - 모델링 격자계가 1 차원이므로 CFD 수치해석에서 사용했던 3 차원 평형

Navier-Stokes equation 을 1 차원으로 축소한다. 캐비티의 대칭성, energy deposition 의 대칭성 그리고 점성 영향을 거의 받지 않는 blast wave 의 특성을 고려하여 axisymmetric source term 을 갖는 평형 Euler equation 으로 변환한다.

2. 반사파 모사

- 초기 blast wave 가 캐비티의 벽면에 부딪히면 반사파가 생성된다. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 추력은 캐비티 내부에서 반사되고 중첩되는 충격파의 복잡한 거동에 의해 발생한다. 따라서 캐비티 내부에서 생성되는 반사파의 거동을 모사해야 한다. 한편, 반사파는 축대칭 유동과는 물리 현상 자체가 다르기 때문에 새로운 모델이 제시되어야 한다. 3 차원 평형 Navier-Stokes equation 에서 캐비티 벽면의 점성 경계층의 두께가 매우 얇다는 가정을 하여 점성 영향을 무시한 다음 반사파의 특성을 고려한 몇 가지 가정을 적용하여 1 차원으로 축소시킨다.

3. 반사파 주기 계산

- R 축 반사파가 캐비티 내부 유동의 주기성에 큰 영향을 미치기 때문에 매 time step 마다 r 축 반사파의 shock position 을 계산하여 이를 기반으로 r 축 반사파의 평균 속력을 계산한다. R 축 반사파의 평균 속력과 이동 거리를 이용하여 캐비티 내부 유동의 주기를 계산한다.

4. Jet boundary condition 모델 도출

- Jet boundary condition 을 모델링하기 위해서는 오리피스 출구 유동을 예측하여야 하지만 유동이 오리피스에 도달하기 위해서는 converging section 을 지나야 한다. 그러나 converging section 은 1-D 격자계로 모델링하는 것이 매우 어렵다. 따라서 jet boundary condition 을 도출하기 위해서는 오리피스 출구 유동 값을

CFD 해석 결과로부터 차용한다.

4.5.1 유동해석 프로그램 검증

앞서 제시된 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 모델링 과정에 따르면 모델 개발 과정은 대부분 1차원 Euler equation의 수치해를 구하는 것이다. 이에 따라 1차원 Euler equation의 수치해를 구하는 프로그램을 만들고 검증하였다. 1-D Riemann problem을 검증 문제로 선정하였으며 Cylindrical coordinate와 spherical coordinate에서의 나타나는 axisymmetric source term을 가진 axisymmetric 1-D Euler equation의 수치해도 제시하였다. 식 (4.1) – (4.3)은 α 가 0 일 때는 1-D Euler equation이 되고 α 가 1 일 때는 cylindrical symmetry Euler equation이 되며 α 가 2 일 때는 spherical symmetry Euler equation이 된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_{\xi}}{\partial \xi} = -\alpha \frac{\rho V_{\xi}}{\xi} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \rho V_{\xi}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_{\xi}^2 + p)}{\partial \xi} = -\alpha \frac{\rho V_{\xi}^2}{\xi} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_{\xi} h_t}{\partial \xi} = -\alpha \frac{\rho V_{\xi} h_t}{\xi} \quad (4.3)$$

1-D Riemann problem은 아래와 같다.

$$(\rho, u, p)_L = (1.0, 0.75, 1.0) \quad x < 0.3$$

$$(\rho, u, p)_R = (0.125, 0.0, 0.1) \quad x > 0.3$$

그림 19 는 α 가 0 일 때 1-D Riemann problem 의 수치해를 구하고 검증한 것이다. 공간 차분 기법은 AUSMPW+, 시간 차분 기법은 3rd TVD-RK method, 고차 정확도 기법으로는 TVD-MUSCL interpolation 과 minmod limiter 를 사용하였다. Analytic solution 과 수치 해가 거의 일치하는 것을 볼 수 있다.

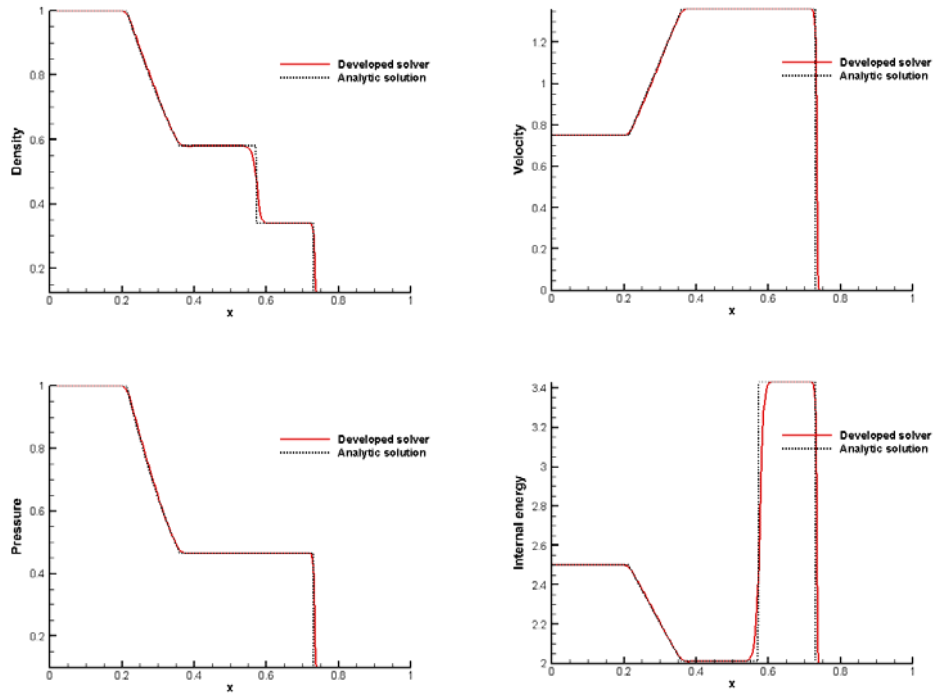


그림 19. 1-D Riemann solver 검증

다음으로, cylindrical symmetry Euler equation 과 spherical symmetry Euler equation 의 수치 해를 구하였다. 그림 20 과 그림 21 은 각각 cylindrical symmetry 와 spherical symmetry 의 경우이다. 두 경우 모두 팽창파 근처에서 그림 19 와는 다른 물리 현상을 찾아볼 수 있다. 이는 팽창파 끝단과 contact discontinuity 시작 영역에서 부피 팽창에 의한 물리량 차이 때문에 secondary shock 이 형성되는 것이다. 또한 cylinder 형상의 부피 팽창

정도보다 sphere 형상의 부피 팽창 정도가 더 크기 때문에 spherical symmetry Euler equation의 수치 해에서 더 강한 secondary shock이 발생하는 것을 알 수 있다.

이로써 본 연구를 위해 개발된 프로그램을 검증하였고 analytic solution과 잘 일치하는 결과를 얻었다.

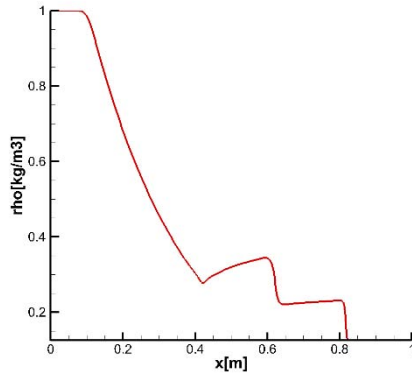


그림 20. Cylindrical symmetry Euler equation 수치 해

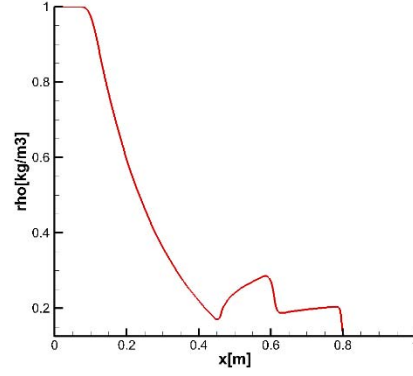


그림 21. Spherical symmetry Euler equation 수치 해

4.5.2 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 모델링 검증을 위한 CFD 해석

4.5.1에서 제시된 1-D Euler equation의 수치 해를 얻기 위한 프로그램으로부터 얻은 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터 모델링 결과를 검증하기 위한 데이터가 필요하다. 이는 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터의 CFD 수치해석 결과로부터 z 축 격자계와 r 축 격자계에 해당하는 영역의 유동 변수를 추출하여 비교하면 된다. 앞서 4.3절에서 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터의 CFD 결과를 제시하였으나 이 결과는 그림 9의 격자로 수치해석한 것이다. 그림 9의 격자는 캐비티 내부 유동 구조의 경향성을 간단히 파악하고 모델링의 방향성을 정하고자 했던 기존의 목적에 걸맞게 성기계를 만들어진 것이다. 그러나 캐비티 내부 유동의 경향성이 대부분 파악되고 모델링의 방향이

정해져 이로부터 도출된 모델링 결과의 정확도를 검증하는 시점에는 훨씬 더 정확하게 해석된 CFD 결과가 요구된다. 따라서 그림 9 보다 더 촘촘한 격자계를 사용하여야 한다. 또한 실제 스파크 제트 플라즈마 액추에이터를 구성하고 있는 캐비티, converging section, 오리피스와 같은 구조를 전부 모델링하는 것은 쉽지 않기 때문에 유동 양상이 복잡한 converging section 과 오리피스를 제외한 나머지 구조인 캐비티 내부 영역만 수치해석 한다.

모델링 검증 목적으로 사용될 CFD 해석을 위한 격자가 그림 22 에 제시되었다. 그림 22 의 좌측은 z 축에서의 singularity 를 피하기 위해 세 개의 서로 다른 블록으로 구성한 것이고 우측은 converging section 과 orifice 없이 캐비티로만 구성한 것이다. 격자 개수는 3,000,000 개이며 평균 격자 간격은 $\Delta x = 6 \times 10^{-3}$ 이다. 자유류 초기 조건과 플라즈마 초기 조건은 4.2 절에서 제시된 값과 동일한 값을 사용하였으며 energy deposition 영역과 높이는 4.1 절에서 제시된 수치와 동일한 값을 사용하였다. 마지막으로 전 유동장에 비점성 가정을 하였다.

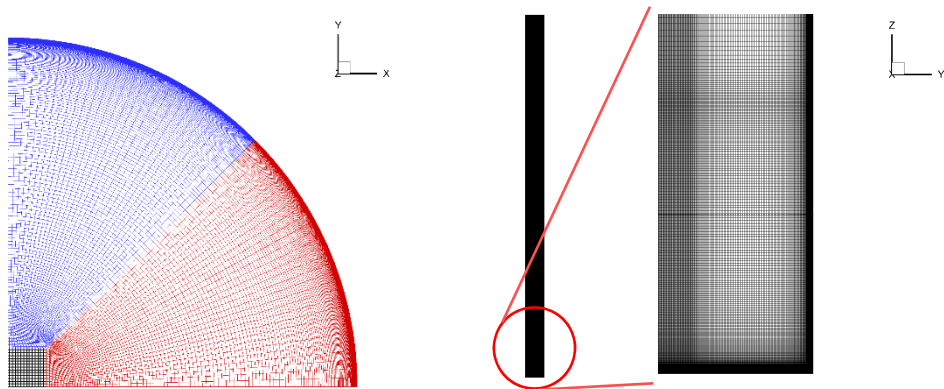


그림 22. 스파크 제트 액추에이터 모델링 검증을 위한 CFD 격자계

그림 23 - 26 은 모델링 검증 목적으로 사용될 CFD 해석 결과이다. 다양한 시간

대에서의 압력 contour 를 보여주고 있다. 그림 23 - 26 에서 z 축과 y 축이 각각 모델링 격자계의 z 축 격자계와 r 축 격자계에 해당하는 영역이며 이 영역에서의 유동 값을 1-D 로 추출하여 모델링 결과와 비교한다.

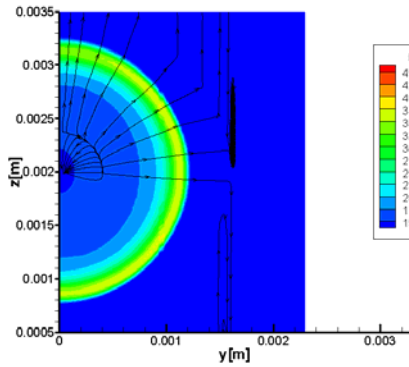


그림 23. 1.0 μ s 에서 캐비티 내부

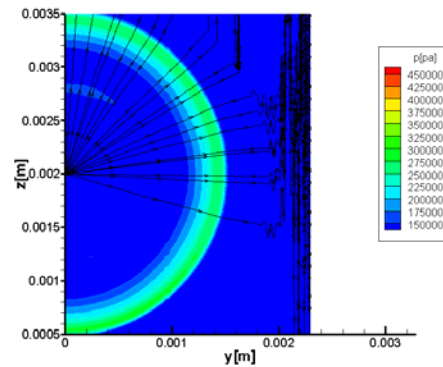


그림 24. 1.5 μ s 에서 캐비티 내부

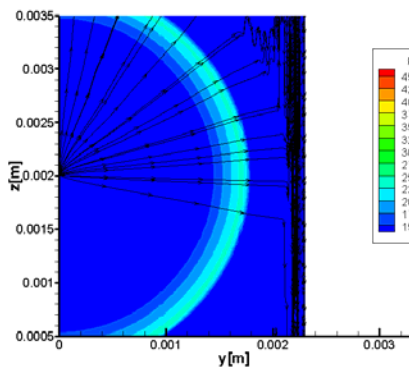


그림 25. 2.0 μ s 에서 캐비티 내부

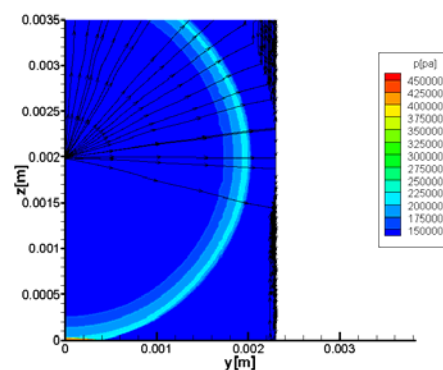


그림 26. 2.5 μ s 에서 캐비티 내부

4.5.2 지배방정식 변환

이제 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 모델 개발의 첫 단계인 지배방정식 변환을 하자. 초기 blast wave 는 energy deposition 영역에서 전파되기 시작한다. Energy deposition 영역은 x 축으로 대칭인 유한한 cylinder 형태로 cylindrical symmetry 도 아니고

spherical symmetry 도 아니다. 따라서 축 대칭 계수가 공간과 시간에 대한 함수로 주어
 져야만 초기 blast wave 를 모사할 수 있다. 즉, Energy deposition 영역에서 전파되는 초기
 blast wave 의 기하학적 형상은 cylindrical wave 와 spherical wave 의 혼합된 형태이므로 α
 가 상수가 아니라 시간과 공간에 대한 함수인 $\alpha(x, t)$ 로 주어져야 한다.

한편, Cylindrical symmetry 에서 α 가 1 이고 spherical symmetry 에서 α 가 2 이기 때문
 에 $\alpha(x, t)$ 가 1 에서 2 로 점진적으로 변해야 한다고 생각할 수 있으나 axisymmetric
 source term 의 특성을 생각해 보면 그렇지 않다. 유동이 흐르는 방향과 일치하는 방향의
 contravariant vector 와 유동이 흐르는 방향에 수직인 방향의 contravariant vector 를 가지는
 좌표계를 찾을 수 있을 때 이 좌표계로 변환된 지배방정식을 생각하자. 이 변환된 지
 배방정식에서 등장하는 Axisymmetric source term 은 유동이 흐르는 방향에 수직인 방향
 으로는 대칭성에 의해서 물리량의 변화가 없고 오로지 유동이 흐르는 방향과 평행한
 방향에 대한 부피 팽창률이 jacobian 의 변화율로 표현된 항이다. 따라서 양의 속도를
 갖는 것은 유동이 팽창하는 것이기 때문에 질량과 에너지 방정식에 음의 source 가 작
 용하고 음의 속도를 갖는 것은 유동이 수축하는 것이기 때문에 질량과 에너지 방정식
 에 양의 source 가 작용하게 된다. 또한 α 의 크기는 유동이 팽창 혹은 수축하는 정도를
 나타내기 때문에 팽창 혹은 수축할 수 있는 자유도가 한 방향인 cylindrical coordinate
 에서는 α 가 1 이 되고 자유도가 두 방향인 spherical coordinate 에서는 α 가 2 가 되는 것
 이다. 하지만 일반적인 경우에는 위와 같이 streamline 에 정확히 일치하는 좌표계를 선
 정할 수 없기 때문에 좌표계와 수직인 방향으로 유동의 대칭성을 확보할 수 없다. 따
 라서 axisymmetric source term 뿐만 아니라 추가적인 미분 항이 요구되어 $\alpha(x, t)$ 가 1 보
 다 작을 수도 2 보다 클 수도 있다.

초기 blast wave 의 위치를 모사하는 것뿐만 아니라 전 유동장을 잘 모사할 수 있

여야 하므로 그러한 축 대칭 계수 $\alpha(x, t)$ 를 다음과 같이 정하였다.

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1(t) + a_3(t)) - \frac{1}{2}(a_1(t) - a_2(t)) \tanh(k_p(\bar{x}^* - x_p)) \\ \quad - \frac{1}{2}(a_2(t) - a_3(t)) \tanh(k_m(\bar{x}^* - x_m)) & t \leq t_c = 1.0 \times 10^{-6} \\ 0.8 + \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + \left(f_c \left(\frac{t_c}{t}\right)^n\right)^2} & t_c < t \leq t_{\text{reflection}} \end{cases} \quad (4.4)$$

$$a_1(t) = \frac{1}{2}(a_{1,max} - a_{3,max})(\tanh(k_1(t - t_1)) + 1) + a_{3,max}$$

$$a_2(t) = \frac{1}{2}(a_{2,max} - a_{3,max})(\tanh(k_2(t - t_2)) + 1) + a_{3,max}$$

$$a_3(t) = a_{3,max}$$

$$a_{1,max} = 1.5 \quad a_{2,max} = 3.0 \quad a_{3,max} = 1.0$$

$$k_1 = 3 \times 10^6 \quad k_2 = 4 \times 10^7 \quad t_1 = t_2 = 5.3 \times 10^{-7}$$

$$\bar{x} = |x_{cell} - x_{axis}| \quad \bar{x}^* = \frac{|x_{cell} - x_{axis}|}{|x_{cell} - x_{S,2}|}$$

$$k_p = k_m = 10 \quad x_m = 0.87 \quad x_p = 0.3$$

$$f_c = 12 \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{D^2}{4}} \quad n = 8$$

여기서 x_{axis} 는 z 축 좌표계와 r 축 좌표계 각각에 대해 energy deposition 영역의 중심 좌표이다. 초기 blast wave 는 energy deposition 영역의 중심으로부터 전파되므로 이 점을 중심으로 하여 축 대칭 계수를 사용할 수 있다. Z 축 좌표계에 대해서 x_{axis} 는 0.002 이고 r 축 좌표계에 대해서는 0 이다. 또한 L 은 energy deposition 영역의 길이이고 D 는 energy deposition 영역의 지름이다. 마지막으로 $x_{S,2}$ 와 $t_{\text{reflection}}$ 는 각각 오리피스로 향하는 충격파의 위치와 캐비티 벽면으로 향하는 충격파가 벽면에서 반사되는 시간이다. 본 연구에서는 R 축 반사파의 주기를 구하기 위해서 각 좌표계에 대해 매 time step 마다 충격파의 위치를 포착한다. Z 축 좌표계는 캐비티 아래 벽면으로 전파되는 충격파

와 오리피스로 향하는 충격파, 이렇게 두 개가 포착되고 r 축 좌표계에서는 캐비티 원통 벽면으로 전파되는 충격파 하나가 포착된다.

충격파를 포착 하기 위해서는 우선 전 유동장에서 속도의 4 차 중앙차분 값을 구한다.

$$\Delta V_i = \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 4v_{i+1} - v_{i+2}}{6}$$

ΔV_i 값이 최대가 되는 지점을 i_{\max} 라고 하여 충격파의 위치를 $x_{i_{\max}}$ 라고 하면 시간에 따른 충격파 위치가 매우 불연속적으로 계산된다. 이는 정보의 전달이 computational time step 동안 cell 한 개를 넘을 수 없다는 CFL 조건에 의해서 일정한 시간 동안은 충격파의 위치가 항상 같은 cell 내부에 위치하게 되기 때문이다. 따라서 i_{\max} 근처의 index 를 이용하여 충격파의 위치를 계산할 필요가 있다. $\Delta V_{i_{\max}}$ 가 가장 크고 $\Delta V_{i_{\max}-1}$ 와 $\Delta V_{i_{\max}+1}$ 은 $\Delta V_{i_{\max}}$ 보다 작지만 국소적으로는 비교적 큰 값을 가지게 된다는 점에 착안하여 $\Delta V_{i_{\max}-1}$, $\Delta V_{i_{\max}}$, $\Delta V_{i_{\max}+1}$ 세 값을 $Ae^{-k(x-m)^2}$ 형태의 함수로 fitting 한다. 이렇게 하여 계산된 충격파 위치는 다음과 같다.

$$x_{i_{\max}} + \frac{1}{2}\Delta x \frac{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{\max}+1}}{\Delta V_{i_{\max}-1}}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{\max}}}{\Delta V_{i_{\max}-1} \Delta V_{i_{\max}+1}}\right) + 10^{-16}} \quad (4.5)$$

한편, 충격파의 위치가 벽면에 가까워 질수록 ($|x_s - x_{wall}| \leq 2\Delta x$) $\Delta V_{i_{\max}-1}$, $\Delta V_{i_{\max}}$, $\Delta V_{i_{\max}+1}$ 의 분포가 $Ae^{-k(x-m)^2}$ 형태를 벗어나게 되어 충격파 위치를 계산하기 어렵게 된다. 따라서 충격파의 위치와 벽면의 거리가 $|x_s - x_{wall}| \leq 2\Delta x$ 조건을 만족하

면 $x_{i_{\max}} + \frac{1}{2}\Delta x \frac{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{\max}+1}}{\Delta V_{i_{\max}-1}}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{\max}}}{\Delta V_{i_{\max}-1} \Delta V_{i_{\max}+1}}\right) + 10^{-16}}$ 를 이용하여 충격파를 계산하지 않고 충격파의

속도를 근사하여 extrapolation 한다. 충격파의 속도는 이전 time step 에서 계산된 충격파

의 위치들에 대해 least square method 를 사용하여 fitting 한 다음 fitting 된 함수를 미분하여 구한다. 원래 least square method 를 통해 얻은 fitting 함수를 미분할 경우 fitting 하는데 사용한 raw data 의 불연속성이 클 수록 정확도가 떨어질 가능성이 높으나 $x_{i_{max}} +$

$$\frac{1}{2} \Delta x \frac{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{max}+1}}{\Delta V_{i_{max}-1}}\right)}{\ln\left(\frac{\Delta V_{i_{max}}}{\Delta V_{i_{max}-1}} \cdot \frac{\Delta V_{i_{max}}}{\Delta V_{i_{max}+1}}\right) + 10^{-16}}$$

를 이용하여 구한 충격파 위치는 매우 연속적이어서 미분해도 정확도가 낮지 않았다.

그림 27 은 4.5.1 에서 추출한 z 축의 압력 값과 식 (4.4)를 적용한 모델에서 계산된 z 축 격자계의 압력 값을 비교한 것이다. 검은색 점은 4.5.1 에서 계산한 CFD 결과로부터 추출한 압력 값이고 붉은 색 선은 식 (4.4)를 적용한 모델링 결과이다. 각각 0.5 μ s, 1.0 μ s, 1.5 μ s, 2.0 μ s, 2.5 μ s 에서의 결과이다. 그림 27 은 그림 28 과 마찬가지로 4.5.1 에서 추출한 y 축의 압력 값과 식 (4.4)를 적용한 모델에서 계산된 r 축 격자계의 압력 값을 비교한 것이다. 마찬가지로 검은 색 점은 4.5.1 에서 계산한 CFD 결과로부터 추출한 압력 값이고 붉은색 선은 식 (4.4)를 적용한 모델링결과이다. 각각 0.5 μ s, 1.0 μ s, 1.5 μ s, 2.0 μ s, 2.5 μ s, 3.0 μ s 에서의 결과이다. 전 유동장에서 전반적으로 잘 일치하며 특히 벽면과 오리피스로 전파되는 충격파의 위치를 잘 포착하는 것을 알 수 있다. 한편, 그림 29 는 r 축 충격파의 위치를 (4.5)에서 제시된 방법으로 계산한 결과이다. 본 연구에서 충격파의 위치를 통한 반사파의 주기를 구하는 것이 중요하므로 정확한 충격파의 위치를 포착하는 것이 관건이다. 식 (4.5)를 사용하여 충격파의 위치를 부드럽게 포착할 수 있음을 확인하였다.

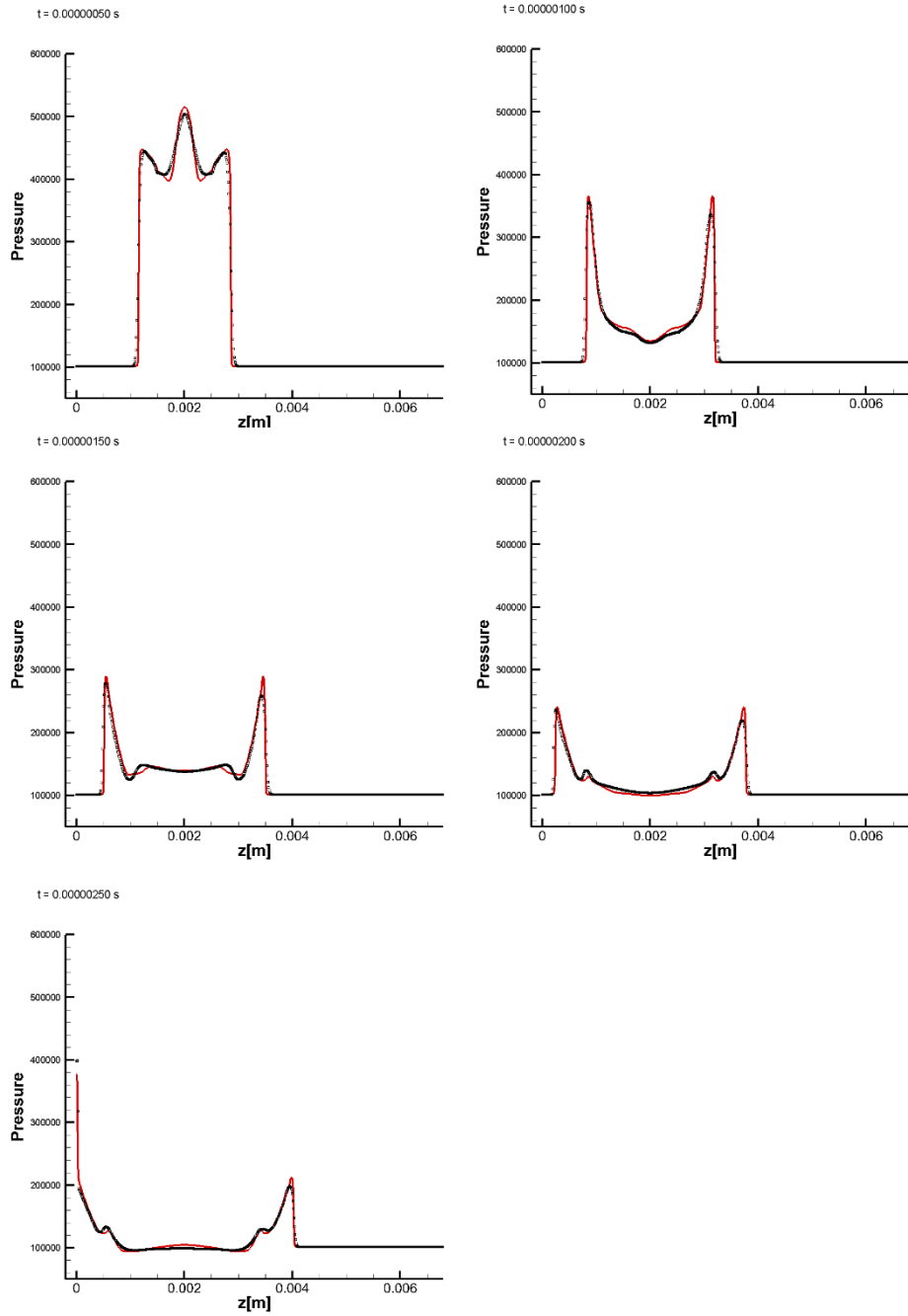


그림 27. CFD 결과 (z 축)와 모델링 결과(z 축 격자계) 비교, 벽면에 반사되기 전까지의 압력 contour

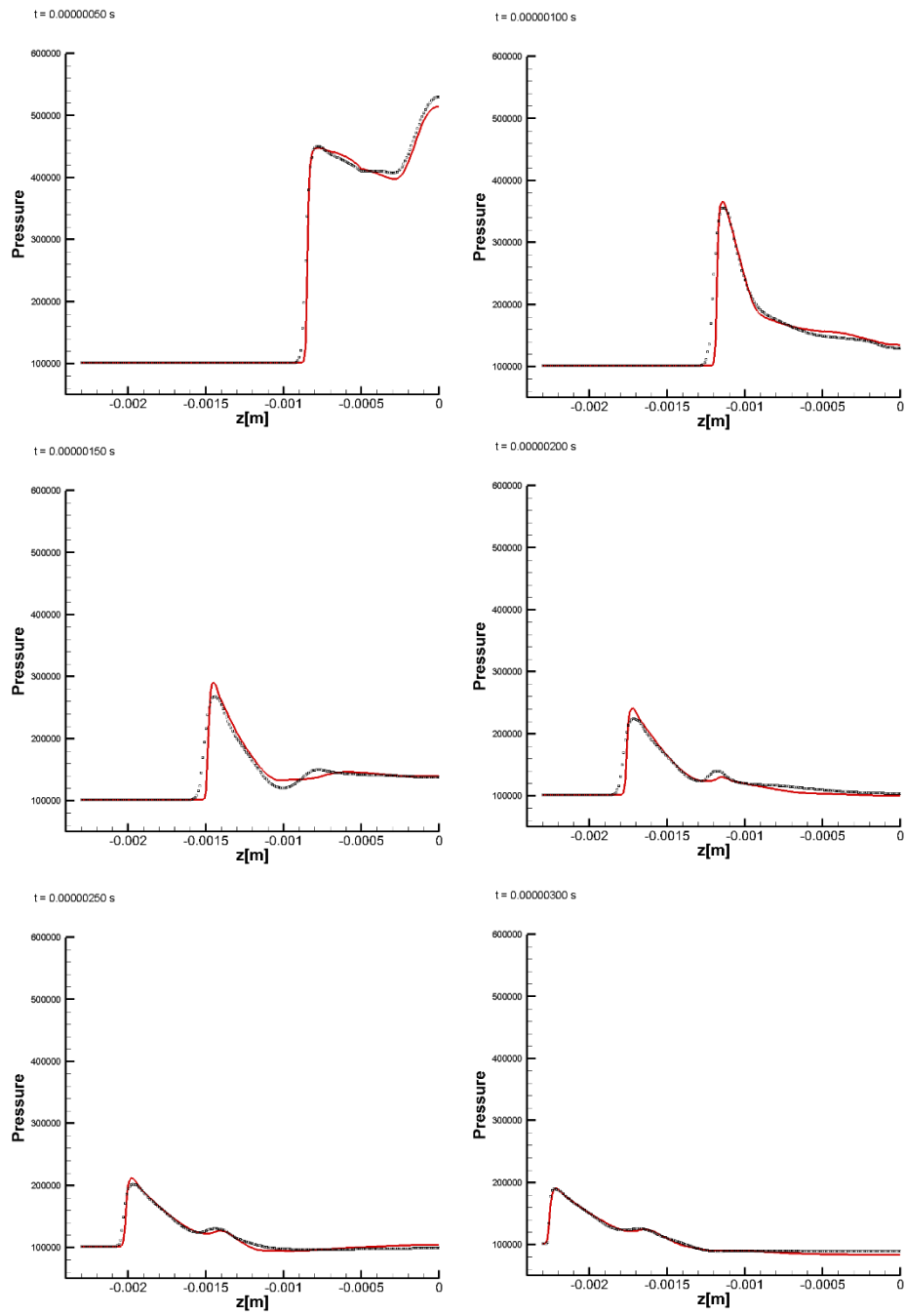


그림 28. CFD 결과 (y 축)와 모델링 결과(r 축 격자계) 비교, 벽면에 반사되기 전까지의 압력 contour

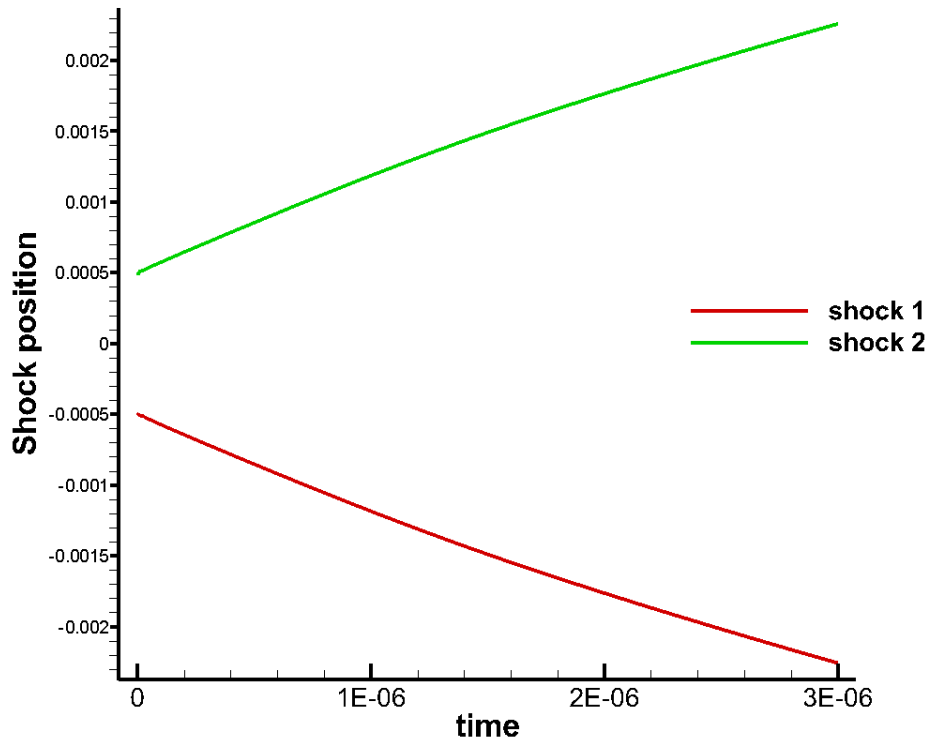


그림 29. R 축 격자계에서 충격파의 위치

4.5.3 반사파 모사

충격파가 벽면에 반사되어 형성된 반사파는 초기 blast wave 와는 달리 energy deposition 영역 중심에 대한 대칭성을 잃어버리기 때문에 식 (4.4)와 같은 축 대칭 계수 모델링을 사용할 수 없다. 따라서 반사 충격파가 형성되는 시간 이후부터는 충격파 내부 영역과 충격파 외부 영역으로 격자계를 구분하여 충격파 내부 영역에는 반사파에 맞는 새로운 모델을 적용하고 충격파 외부 영역은 식 (4.4)의 축 대칭 계수를 변형하여 사용한다.

벽면에서 반사되는 반사파의 형상은 z 축 격자계와 r 축 격자계가 다르다. z 축 격자계에서 생성되는 반사파는 convex surface 지만 r 축 격자계에서 생성되는 반사파는 saddle surface 이다. 이는 그림 16 에 잘 나타나있다. 이처럼 두 가지 서로 다른 형태의 반사파를 묘사하기 위해서 일반 직교 곡선 좌표계 (η^1, η^2, η^3) 를 생각하자. 그림 30 에 그려진 곡면들이 $\vec{\eta}^i$ 벡터에 수직인 곡면들이라고 가정하면 η^i 가 일정한 곡면 중의 하나가 반사파가 된다. 이제 일반 직교 곡선 좌표계 $(\eta^1, \eta^2, \eta^3) = (\xi, \eta, \zeta)$ 로 변환된 3D Euler equation 을 생각해보자. 식 (4.6) – (4.8) 은 각각 일반 직교 곡선 좌표계로 변환된 질량 방정식, \vec{n} 방향 운동량 방정식, 에너지 방정식이다.

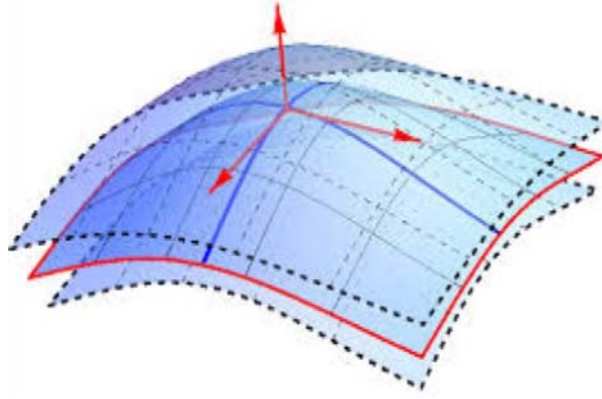


그림 30. 일반 곡선 좌표계

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \rho V_\xi \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \rho V_\eta \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \rho V_\zeta \right) &= 0 \quad (4.6) \\ \frac{\partial \rho V_n}{\partial t} + J h_n \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi h_n} \rho V_\xi V_n \right) + J h_n \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta h_n} \rho V_\eta V_n \right) + J h_n \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta h_n} \rho V_\zeta V_n \right) + \\ h_n \left(\nabla_\xi \cdot \nabla n \frac{\partial p}{\partial \xi} + \nabla_\eta \cdot \nabla n \frac{\partial p}{\partial \eta} + \nabla_\zeta \cdot \nabla n \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) - \end{aligned}$$

$$\rho h_n \begin{pmatrix} \frac{V_\xi}{h_\xi} & \frac{V_\eta}{h_\eta} & \frac{V_\zeta}{h_\zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} & \frac{\partial n_x}{\partial \eta} & \frac{\partial n_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_y}{\partial \xi} & \frac{\partial n_y}{\partial \eta} & \frac{\partial n_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_z}{\partial \xi} & \frac{\partial n_z}{\partial \eta} & \frac{\partial n_z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{V_\xi}{h_\xi} \\ \frac{V_\eta}{h_\eta} \\ \frac{V_\zeta}{h_\zeta} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \rho h_t V_\xi \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \rho h_t V_\eta \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \rho h_t V_\zeta \right) = 0 \quad (4.8)$$

세 방정식의 unsteady term, convection term 은 유사한 형태를 가지지만 운동량 방정식의 pressure gradient term, centrifugal term, coriolis term 은 매우 복잡하여 정리가 필요하다. 우선 행렬 형태로 함께 쓰여있는 Centrifugal term 과 coriolis term, $\Pi_{ij}^n =$

$\left\{ \begin{pmatrix} x_\xi & y_\xi & z_\xi \\ x_\eta & y_\eta & z_\eta \\ x_\zeta & y_\zeta & z_\zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} & \frac{\partial n_x}{\partial \eta} & \frac{\partial n_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_y}{\partial \xi} & \frac{\partial n_y}{\partial \eta} & \frac{\partial n_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_z}{\partial \xi} & \frac{\partial n_z}{\partial \eta} & \frac{\partial n_z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \right\}_{ij}$ 를 계산하자. Cartesian coordinate 에서의 단위벡터인

\hat{e}_i 를 η^j 로 미분하면 0 이다. 그러나 $\hat{e}_i = \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \vec{\eta}^k$ 이므로 $\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial \eta^j} = 0 = \frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \vec{\eta}^k \right) =$

$\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \right) \vec{\eta}^k + \frac{\partial \eta^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \vec{\eta}^k$ 이 된다. 한편, $\frac{\partial \vec{\eta}^k}{\partial \eta^j} = \Gamma_{kj}^p \vec{\eta}^p$ 이므로 $\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \right) \vec{\eta}^k = -\frac{\partial \vec{\eta}^k}{\partial \eta^j} \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} =$

$-\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^p \vec{\eta}^p$ 이다. 좌변을 k 에 대해 전개하고 우변을 p 에 대해 전개하면 $\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial x_i} \right) \vec{\eta}^1 +$

$\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^2}{\partial x_i} \right) \vec{\eta}^2 + \frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^3}{\partial x_i} \right) \vec{\eta}^3 = -\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^1 \vec{\eta}^1 - \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^2 \vec{\eta}^2 - \frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \Gamma_{kj}^3 \vec{\eta}^3$ 이 된다. 여기서 기저 벡터

$\vec{\eta}^k$ 는 서로 독립이므로 $\frac{\partial}{\partial \eta^j} \left(\frac{\partial \eta^k}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial \eta^p}{\partial x_i} \Gamma_{pj}^k$ 가 된다. 한편, $A_{kj}^n = \begin{pmatrix} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} & \frac{\partial n_x}{\partial \eta} & \frac{\partial n_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_y}{\partial \xi} & \frac{\partial n_y}{\partial \eta} & \frac{\partial n_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial n_z}{\partial \xi} & \frac{\partial n_z}{\partial \eta} & \frac{\partial n_z}{\partial \zeta} \end{pmatrix}_{kj}$

로 정의하면 $\Pi_{ij}^n = \frac{\partial x_k}{\partial \eta^i} A_{kj}^n$ 이 되는데 $A_{kj}^n = -\frac{\partial \eta^p}{\partial x^k} \Gamma_{pj}^n$ 이므로 $\Pi_{ij}^n = \frac{\partial x_k}{\partial \eta^i} A_{kj}^n =$

$-\frac{\partial x_k}{\partial \eta^i} \frac{\partial \eta^p}{\partial x^k} \Gamma_{pj}^n = -\delta^{ip} \Gamma_{pj}^n = -\Gamma_{ij}^n$ 가 된다. 여기서 사용된 Γ_{ij}^k 은 제 2 종 Christoffel symbol

로 $\frac{1}{2}h_k^{-2}(\frac{\partial h_i^2}{\partial \eta^j}\delta_{ik} + \frac{\partial h_j^2}{\partial \eta^i}\delta_{jk} - \frac{\partial h_i^2}{\partial \eta^k}\delta_{ij})$ 와 같이 계산한다. 두 번째로, Pressure gradient term 을

계산하자. 각 항의 계수는 $\nabla \eta^i \cdot \nabla \eta^j$ 형태를 하고 있는데 이는 i와 j가 같으면 $\frac{1}{h_i^2}$ 이 되

고 i와 j가 다르면 0이 된다. Coriolis term, centrifugal term, pressure gradient term 을 모두

정리했으므로 최종적인 3D Euler equation 은 식 (4.9) – (4.13) 과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho V_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho V_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \rho V_\zeta}{\partial \zeta} \\ = - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\eta - \left(J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \right) \right) \rho V_\zeta \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_\xi}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (\rho V_\xi^2 + p)}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho V_\xi V_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \rho V_\xi V_\zeta}{\partial \zeta} \\ = - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi^2 + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \rho V_\eta^2 + \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial \xi} \rho V_\zeta^2 \\ - \left(\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\xi V_\eta - \left(\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \zeta} + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \right) \right) \rho V_\xi V_\zeta \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho V_\xi V_\eta}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial (\rho V_\eta^2 + p)}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \rho V_\zeta V_\eta}{\partial \zeta} \\ = + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \rho V_\xi^2 - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\eta^2 + \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial \eta} \rho V_\zeta^2 \\ - \left(\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi V_\eta - \left(\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \zeta} + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \right) \right) \rho V_\zeta V_\eta \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho V_\zeta}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho V_\xi V_\zeta}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho V_\zeta V_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial (\rho V_\zeta^2 + p)}{\partial \zeta} \\ = + \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \zeta} \rho V_\xi^2 + \frac{1}{h_\eta h_\zeta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \zeta} \rho V_\eta^2 - \left(J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \right) \right) \rho V_\zeta^2 \\ - \left(\frac{1}{h_\xi h_\zeta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial \xi} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi V_\zeta - \left(\frac{1}{h_\zeta h_\eta} \frac{\partial h_\zeta}{\partial \eta} + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\zeta V_\eta \quad (4.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho h_t V_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho h_t V_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\zeta} \frac{\partial \rho h_t V_\zeta}{\partial \zeta} \\ = - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho h_t V_\xi - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho h_t V_\eta - \left(J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{J h_\zeta} \right) \right) \rho h_t V_\zeta \quad (4.13) \end{aligned}$$

앞 서 정리한 3D Euler equation 을 캐비티에 적용해보자. 캐비티의 대칭성에 의해 일반성을 잃지 않고 $\eta^3 = \zeta$ 방향에 대해 대칭이라고 가정할 수 있다. 따라서 3D Euler equation 은 2D Euler equation 이 되어 식 (4.14) – (4.17) 과 같이 정리할 수 있다. 식 4.9 는 질량 방정식, 식 4.10 과 4.11 은 운동량 방정식, 식 4.12 는 에너지 방정식이다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho V_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho V_\eta}{\partial \eta} = - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\eta \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V_\xi}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (\rho V_\xi^2 + p)}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho V_\xi V_\eta}{\partial \eta} \\ &= - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi^2 + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \rho V_\eta^2 - \left(\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\xi V_\eta \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho V_\eta}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho V_\xi V_\eta}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial (\rho V_\eta^2 + p)}{\partial \eta} \\ &= + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \rho V_\xi^2 - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho V_\eta^2 - \left(\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho V_\xi V_\eta \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho h_t V_\xi}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho h_t V_\eta}{\partial \eta} = - \left(J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right) \right) \rho h_t V_\xi - \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \right) \rho h_t V_\eta \quad (4.17)$$

식 (4.14) – (4.17) 를 z 축 격자계와 r 축 격자계의 대칭성을 이용하여 간단히 정리하기 전에 몇 가지 정의와 가정을 서술하겠다. 다음 정의와 가정은 z 축 반사파나 r 축 반사파에 관계없이 적용되는 것이다. 우선 방향을 정의한다. Shock 이 진행하는 방향을 $\vec{\xi}$ 로 두고 ζ 방향이 아닌 나머지 방향을 η 방향으로 정의한다. 그림 31 에서 일반 직교 좌표계의 방향이 z 축 격자계와 r 축 격자계 각각에 대해 어디로 정의되는지 알 수 있도록 도시하였다. 두 번째로 반사파의 곡면을 따르는 좌표계 상에서 물리적인 해가 존재하는 영역에는 좌표계의 singularity 가 존재하지 않는다. 이 가정은 scale factor 가 0 이 되는 singularity 의 존재성을 z 축 격자계와 r 축 격자계 근방에서 배제함으로써 유한한

scale factor 만을 다룰 수 있게 한다.

마지막으로 일반 직교 곡선 좌표계의 jacobian J 와 η^i 방향의 scale factor h_{η^i} 로 이루

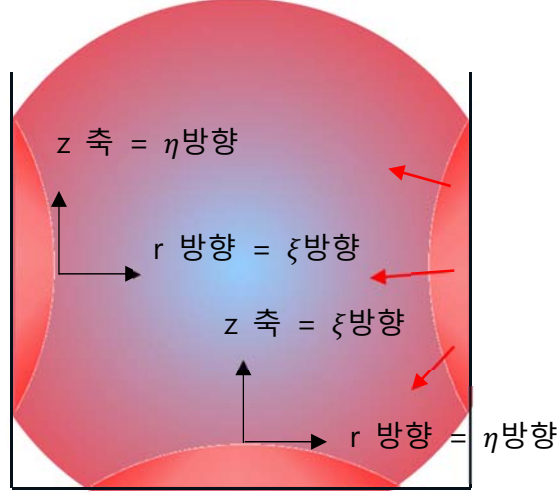


그림 31. 일반 곡선 좌표계의 기저벡터가 캐비티 내부에서 정의되는 방향

어진 다음과 같은 geometric entity, $J \frac{\partial}{\partial \eta^i} \left(\frac{1}{J h_{\eta^i}} \right)$ 는 η^i 가 일정한 곡면의 곡률과 같다는

Lemma 를 증명해야 한다.

Lemma) $J \frac{\partial}{\partial \eta^i} \left(\frac{1}{J h_{\eta^i}} \right)$ 는 η^i 가 일정한 곡면의 곡률과 같다

Proof) 곡면에 접하고 임의의 단위 벡터 \hat{v} 를 생각하자. \hat{v} 는 곡면에 접하고 서로 수직하는 두 기저벡터 $\hat{\eta}$ 와 $\hat{\zeta}$ 의 선형결합으로 표현할 수 있다. 이를 식으로 나타내면 아래와 같다.

$$\hat{v} = \hat{\eta} \cos \alpha + \hat{\zeta} \sin \alpha$$

임의의 단위 벡터 \hat{v} 방향에 대한 곡률은 $\hat{v} \cdot (\hat{v} \cdot \nabla \hat{n}) = \left(\frac{x_{\eta}}{h_{\eta}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_{\eta}}{h_{\eta}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_{\eta}}{h_{\eta}^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{x_{\zeta}}{h_{\zeta}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_{\zeta}}{h_{\zeta}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_{\zeta}}{h_{\zeta}^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) \sin^2 \alpha + B \cos \alpha \sin \alpha$ 로 쓸 수 있다.

여기서 B 는 복잡한 수식으로 구성되어 있지만 향후 논의에는 필요하지 않아 굳이 서술하지 않았다. 그러나 실제 곡률은 mean principle curvature 로 정의하는데 이는 임의의 단위 벡터 \hat{v} 방향에 대한 곡률 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값의 합과 같다. 따라서 $f(\alpha) = \hat{v} \cdot (\hat{v} \cdot \nabla \hat{n})$ 로 정의하여 $\frac{df}{d\alpha} = 0$ 이 되는 α_1 과 α_2 에 대해 $f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ 를 구하면 mean principle curvature 을 얻는다. α_1 과 α_2 를 구하고 $f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ 를 계산하면 식 (4.18)을 얻는다.

$$\left(\frac{x_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) + \left(\frac{x_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) \quad (4.18)$$

곡면에 접하는 방향이 $\vec{\eta}$ 와 $\vec{\zeta}$ 이므로 수직한 벡터 n 은 $\vec{\xi}$ 가 된다. N 에 ξ 를 대입하고

4.18 을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_\eta}{h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) + \left(\frac{x_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x_n}{h_n} \right) + \frac{y_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{y_n}{h_n} \right) + \frac{z_\zeta}{h_\zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{z_n}{h_n} \right) \right) \\ &= \left(\eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \xi_x) + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi \xi_x) \right) + \left(\eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \xi_y) + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi \xi_y) \right) \\ & \quad + \left(\eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \xi_z) + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi \xi_z) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z)) - h_\xi \left(\xi_x \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} + \xi_z \frac{\partial \eta_z}{\partial \eta} \right) \\ & \quad - h_\xi \left(\xi_x \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} + \xi_y \frac{\partial \zeta_y}{\partial \zeta} + \xi_z \frac{\partial \zeta_z}{\partial \zeta} \right) \\ &= 0 - \frac{1}{h_\xi} \left(x_\xi \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} + y_\xi \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} + z_\xi \frac{\partial \eta_z}{\partial \eta} \right) - \frac{1}{h_\xi} \left(x_\xi \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} + y_\xi \frac{\partial \zeta_y}{\partial \zeta} + z_\xi \frac{\partial \zeta_z}{\partial \zeta} \right) \\ &= -\frac{1}{h_\xi} (x_\xi \quad y_\xi \quad z_\xi) \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta_y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta_z}{\partial \eta} \end{pmatrix} - \frac{1}{h_\xi} (x_\xi \quad y_\xi \quad z_\xi) \begin{pmatrix} \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \zeta_y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \zeta_z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{h_\xi} (x_\xi \quad y_\xi \quad z_\xi) \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{22}^2 \\ \Gamma_{32}^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{h_\xi} (x_\xi \quad y_\xi \quad z_\xi) \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x & \zeta_x \\ \xi_y & \eta_y & \zeta_y \\ \xi_z & \eta_z & \zeta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{h_\xi} \Gamma_{12}^2 - \frac{1}{h_\xi} \Gamma_{13}^3 = -\frac{1}{h_\xi} \left(\frac{1}{2h_\eta^2} \frac{\partial h_\eta^2}{\partial \xi} + \frac{1}{2h_\zeta^2} \frac{\partial h_\zeta^2}{\partial \xi} \right) = -J \frac{\partial h_\eta h_\zeta}{\partial \xi} = -J \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{J h_\xi} \right)
\end{aligned}$$

Q.E.D

이제 z 축 격자계에 대해 몇 가지 가정을 적용하여 식 (4.14)-(4.17)을 간단히 해보자.

P1) Z 축에 대해 회전대칭이므로 z 축 상에서 $V_\eta = 0$, η 방향 운동량 방정식 무시

P2) Z 축 상에서 Scale factor 가 유한하고 $V_\eta = 0$ 이므로 $\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \rho V_\xi V_\eta$ 과

$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \rho V_\eta^2$ 같은 coriolis term 및 centrifugal term 은 모두 0

P3) η 방향을 따라 측정한 거리를 s_η 라고 하면 임의의 물리량 Q 에 대해서

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho Q V_\eta}{\partial \eta} = \rho Q \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$$

P4) Z 축 상에서 $J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right)$ 는 z 축의 곡률이 되어 $\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z \text{ axis}} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \alpha \right) \rightarrow \infty$

가 되므로 $J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \rho V_\xi V_\eta$ 의 값은 indeterminate form 이다. 따라서 L'Hopital's rule 에 의하

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow z \text{ axis}} \left(J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right) \rho V_\xi V_\eta \right) = \rho V_\xi \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$$

그 다음에는 r 축 격자계에 대해 몇 가지 가정을 적용하여 식 (4.14)-(4.17)을 간단히 해보자.

P1) xy 평면에 대해 상하대칭이므로 xy 평면 상에서 $V_\eta = 0$, η 방향 운동량 방정식

무시

P2) xy 평면 상에서 Scale factor 가 유한하고 $V_\eta = 0$ 이므로 $\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \rho V_\xi V_\eta$ 과

$\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \rho V_\eta^2$ 같은 coriolis term 및 centrifugal term 은 모두 0

P3) η 방향을 따라 측정한 거리를 s_η 라고 하면 임의의 물리량 Q 에 대해서

$$\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho Q V_\eta}{\partial \eta} = \rho Q \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$$

P4) xy 평면 상에서 $J \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{J h_\eta} \right)$ 는 xy 평면의 곡률과 같으므로 0

이와 같은 가정에 의해서 정리된 최종 지배방정식은 식 (4.13) – (4.15) 와 같다. 만
약 i 가 1 이면 z 축 격자계에 해당하는 방정식이고 i 가 0 이면 r 축 격자계에 해당하는
방정식이다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho V_i}{\partial x_i} = -S_{reflection} \rho V_i - (i + 1) \rho \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta} \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \rho V_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho V_i^2 + p)}{\partial x_i} = -S_{reflection} \rho V_i^2 - (i + 1) \rho V_i \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \frac{\partial \rho h_t V_i}{\partial x_i} = -S_{reflection} \rho h_t V_i - (i + 1) \rho h_t \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta} \quad (4.15)$$

식 (4.13) – (4.15)의 우변은 $S_{reflection}$ 과 $\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 을 포함하고 있는데 각각을 어떻게 근사하는지 살펴보자. 반사파의 곡률 $S_{reflection}$ 은 어떤 반사파인지에 따라 값이 다르다. R 축 반사파의 $S_{reflection}$ 는 그림 33 의 검은 곡선의 곡률과 그림 32 의 검은 곡선의 곡률의 차와 같고 z 축 반사파의 $S_{reflection}$ 는 그림 33 의 파란 곡선의 곡률의 두 배와 같다. 이와 같은 곡률의 연산은 mean principle curvature 의 정의에 입각한 것이다.

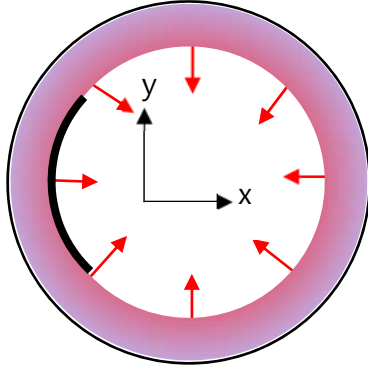


그림 32. xy 단면으로 본 스파크 제트 반사파

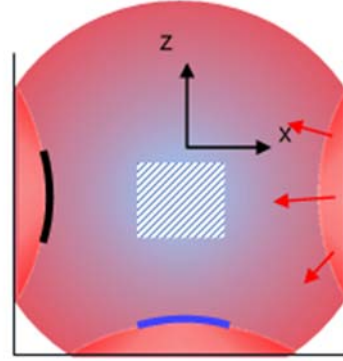


그림 33. xz 단면으로 본 스파크 제트 반사파

$\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 는 ξ 가 일정한 곡면을 따라 흐르는 유동의 속도 V_η 의 변화량이다. Z 축 좌표계와 r 축 좌표계 상에서 V_η 은 0 이지만 그 외의 지점에서는 값이 존재하므로 V_η 의 미분값은 유한하다. $\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 를 근사하기 위해서 그림 34 와 같은 도식화 된 반사파를 생각하자. x_1 벡터를 ξ 벡터로 생각하고 x_2 벡터를 η 벡터로 생각하자. x_1 좌표계 상에 있는 임의의 점 X 에 대해서 V_η 는 0 이다. 한편, 반사파가 벽면을 따라 이동하는 점 R 에 대해서는 V_η 가 유한한데 이 값은 그림 34 에서 알 수 있듯이 X 의 위치에 따라 달라진다. 이를 명확히 하기 위해서는 $\frac{\partial}{\partial s_\eta}$ 미분을 수행할 곡면을 정해야 한다. $\frac{\partial}{\partial s_\eta}$ 미분을 수행할 곡면은 ξ 가 일정한 곡면이므로 ξ 가 일정한 곡면을 정하는 것이 된다. 이 곡면을 점

X 와 점 R 과 점 R' 을 지나는 구의 일부로 가정하자. 그 다음 구의 방정식으로부터 점 R 에서의 수직 단위 벡터를 얻을 수 있다. 이 벡터를 \hat{n} 으로 정의하면 점 R 에서 V_η 의 값은 식 4.16 과 같다.

$$V_\eta = \left| \vec{V} \times \frac{\vec{V}_s}{|\vec{V}_s|} \right| \frac{\hat{n} \cdot \hat{x}_1}{\frac{\vec{V}_s}{|\vec{V}_s|} \cdot \hat{x}_1} \quad (4.16)$$

최종적으로 구의 반지름을 L, 호 \widehat{XR} 의 중심각을 α 라고 하면 $\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 는 $s_\eta = \widehat{XR} = L\alpha$ 이므로 $\frac{V_\eta - 0}{L\alpha} = \frac{V_\eta}{L\alpha}$ 와 같이 선형으로 근사할 수 있다. (여기서 구의 반지름 L 을 사용하여 $S_{reflection}$ 도 구할 수 있다.)

하지만 시간이 지날수록 $\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 값은 0 에 가까워지므로 식 4.16 을 이용하여 선형 근사 한 값과는 차이가 생긴다. 따라서 이를 보정할 수 있는 factor 를 도입하여 $\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta}$ 는 식 4.17 과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial V_\eta}{\partial s_\eta} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \tanh(1.4 \times 10^6 (t - 4.4 \times 10^{-6}))) \frac{V_\eta}{L\alpha} \\ e^{-1.4 \times 10^5 (t - t_{reflection})} \frac{V_\eta}{L\alpha} \end{cases} \quad (4.17)$$

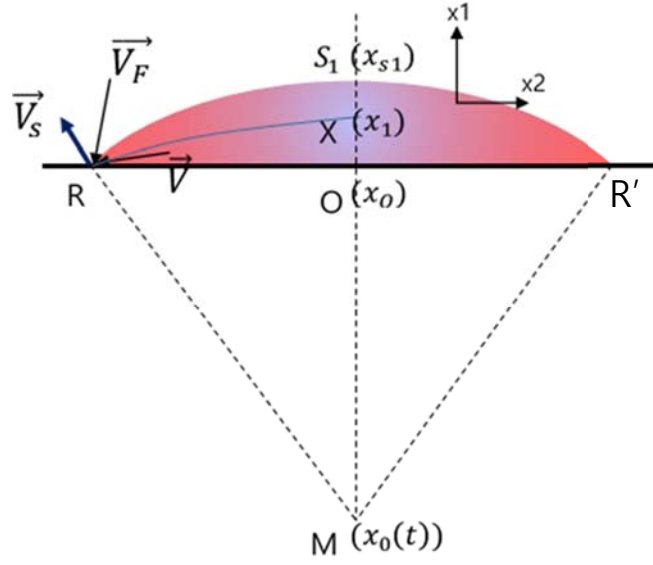


그림 34. 반사파의 기하학적 형상과 접선 속도 변화량의 관계

반사파 이외의 영역은 식 (4.18)로 표현되는 축 대칭 계수 모델을 사용한다. 식 (4.4)와 유사하지만 식 (4.4)는 z 축 반사파가 energy deposition 영역의 중심을 지날 때 해당 부분에서 강한 수치 진동을 야기시키기 때문에 식 (4.18)로 변형되어야 한다.

$$\alpha(x, t) = \begin{cases} 0.5 + \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + \left(f_c \left(\frac{t_c}{t}\right)^n\right)^2} & t_{reflection} \leq t < t_{contact} \\ y_1 + \frac{y_2 - y_1 + \varepsilon}{1 - e^{sign(x_{cell} - x_{axis})k_{tr}(y_2 - y_1 - sign(x_{cell} - x_{axis})\varepsilon)}} & t \geq t_{contact} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$y_1 = k_{po}(x_{cell} - x_{axis})$$

$$y_2 = 0.5 + \frac{\bar{x}^2}{\bar{x}^2 + \left(f_c \left(\frac{t_c}{t}\right)^n\right)^2}$$

$$k_{tr} = 1 \quad \varepsilon = 10^{-16} \quad k_{po} = 7.5 \times 10^6$$

$$\bar{x} = |x_{cell} - x_{axis}|$$

$$t_c = 1.0 \times 10^{-6}$$

$$f_c = 12 \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{D^2}{4}} \quad n = 8$$

$t_{contact}$ 는 반사파가 고온영역에 진입하는 시간을 의미한다.

그림 35는 4.5.1에서 추출한 z 축의 압력 값과 식 (4.13) – (4.17)을 적용한 모델에서 계산된 z 축 격자계의 압력 값을 비교한 것이다. 검은색 점은 4.5.1에서 계산한 CFD 결과로부터 추출한 압력 값이고 붉은색 선은 식 (4.13) – (4.17)을 적용한 모델링 결과이다. 각각 $3.0\mu s$, $3.5\mu s$, $4.0\mu s$, $4.5\mu s$, $5.0\mu s$ 에서의 결과이다. 그림 36은 그림 35와 달리 4.5.1에서 추출한 y 축의 압력 값과 식 (4.13) – (4.17)을 적용한 모델에서 계산된 r 축 격자계의 압력 값을 비교한 것이다. 검은색 점은 4.5.1에서 계산한 CFD 결과로부터 추출한 압력 값이고 붉은색 선은 식 (4.13) – (4.17)을 적용한 모델링 결과이다. 각각 $3.5\mu s$, $4.0\mu s$, $4.5\mu s$, $5.0\mu s$ 에서의 결과이다. 두 경우 중 r 축 반사파의 경우에는 모든 시간대에서 충격파의 세기와 위치를 잘 포착하나 z 축 반사파의 경우에는 $3.0\mu s$, $4.5\mu s$, $5.0\mu s$ 에서 근소한 차이가 있음을 알 수 있다. 거의 반사된 직후인 $3.0\mu s$ 에서는 반사파의 세기가 CFD 결과보다 크게 예측되는데 이는 반사되기 직전의 blast wave가 완전히 구형이 아님에도 불구하고 식 4.16을 유도하는데 있어서 구형으로 가정을 했기 때문으로 예상된다. 또한 $4.5\mu s$ 와 $5.0\mu s$ 에서는 반사파의 위치가 느리게 예측되는데 그 이유는 $4.2\mu s$ 이후 반사파가 고온 영역을 지나면서 급격히 속도가 빨라져 반사파의 형태가 구형에서 많이 벗어나기 때문이다. 한편, 그림 37은 반사되고 난 후의 충격파 위치를 포착한 그래프이다. z 축 반사파가 $4.2\mu s$ 이후 고온영역을 지나면서 속도가 빨라지듯이 r 축 반사파도 약 $5.6\mu s$ 이후 고온영역을 지나면서 속도가 빨라지고 있다.

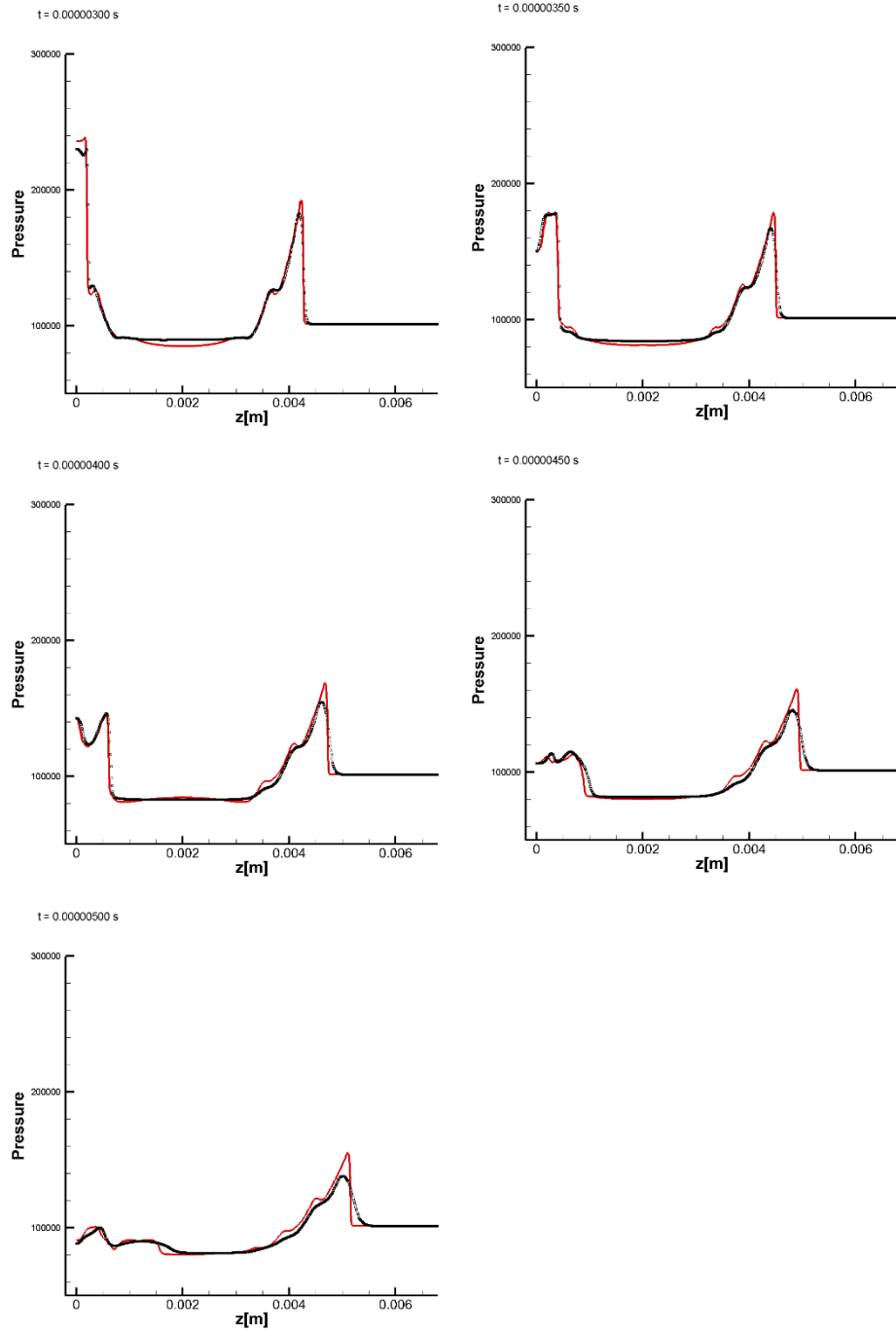


그림 35. CFD 결과 (z 축)와 반사파 모델링 결과(z 축 격자계) 비교

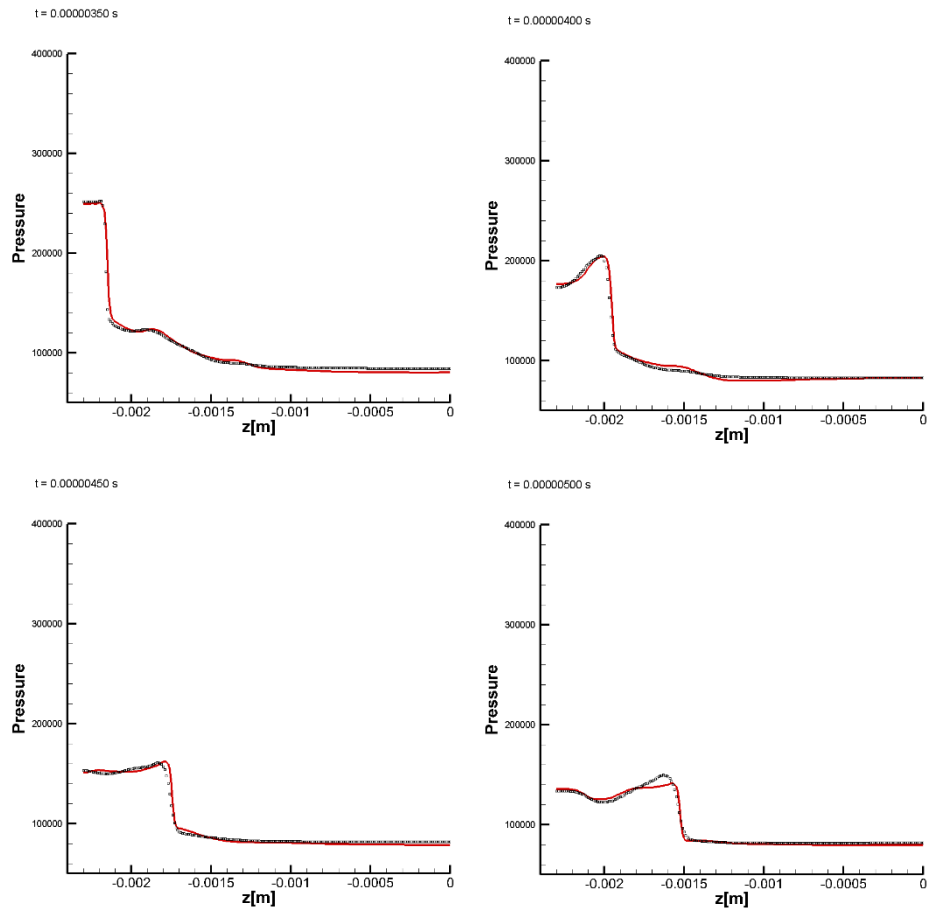


그림 36. CFD 결과 (y 축)와 반사파 모델링 결과(r 축 격자계) 비교

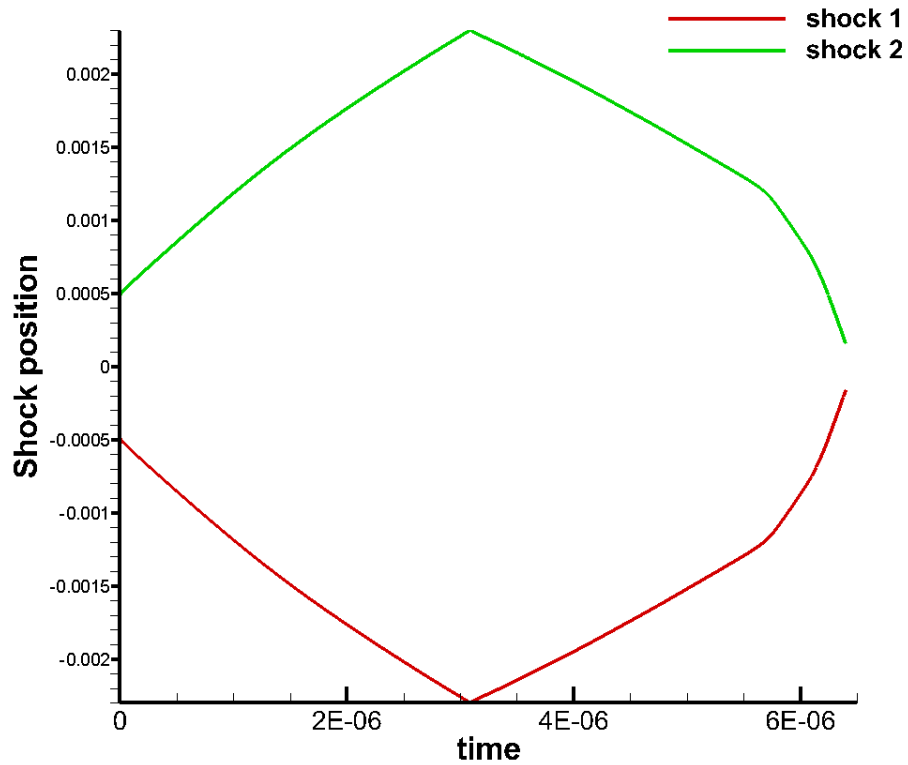


그림 37. R 축 격자계에서 충격파의 위치

4.5.4 반사와 주기 계산

캐비티 내부 유동의 주기를 계산하기 위해서 매 순간 r 축 반사파의 위치를 포착하였다. 그림 38 은 그림 37 이후의 r 축 반사파의 위치를 포착한 것이다. 세 번의 벽면 반사와 두 번의 중첩을 확인할 수 있는데 초기 blast wave 와 세 번째 반사파 까지는 캐비티 내부 유동의 주기를 계산할 때 사용할 수 없다. 그 이유는 스파크 제트 플라즈마 액츄에이터가 구동을 시작하여 시간이 지남에 따라 오리피스 바깥으로 유동이 빠져나가는데 이에 의해 캐비티 내부 충격파의 속도가 점점 느려진다. 즉, 유동이 빠져나가기 전에 발생하는 충격파의

속도는 평균적인 충격파의 속도보다 빠를 뿐만 아니라 이 충격파들의 지속시간도 액추에이터가 구동하는 전체 시간에 비해 매우 짧기 때문에 캐비티 내부 유동의 평균적인 속도를 예측하는데 사용할 수 없다. 이 구간을 transient 구간으로 정의한다. 그림 39에서 특정한 주기 T 로 도시된 파란색 점선은 오리피스 출구 물리량이 주기를 갖고 있음을 보여준다. 그러나 $t=0$ 부터 첫 파란색 점선이 등장하기 전까지는 특정 주기를 따르지 않는 영역을 확인할 수 있는데 이 구간으로 인해 transient 구간의 존재를 명확하게 확인할 수 있다. 따라서 오리피스 바깥으로 유동이 빠져나간 뒤 어느 정도 시간이 흐른 시간대인 두 번

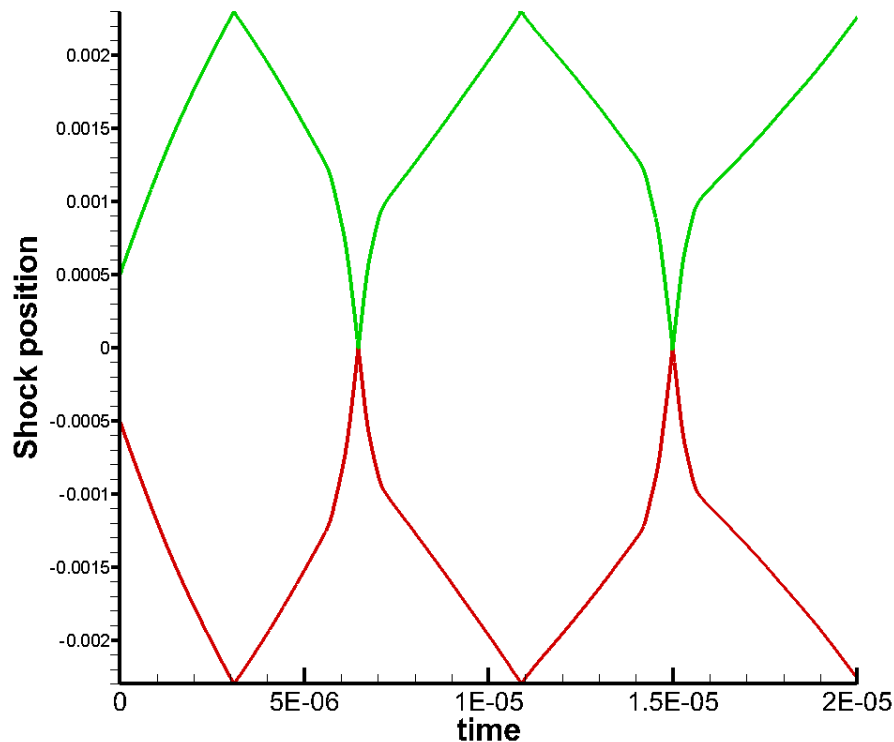


그림 38. R 축 격자계에서 충격파의 위치

제 중첩이 끝나고 세 번째 반사가 일어나기 전의 구간으로부터 캐비티 내부 유동의 주기를 구할 수 있다.

두 번째 중첩이 일어나는 시간은 $15.000\mu s$ 이고 두 번째 반사가 일어나는 시간은 $20.061\mu s$ 이므로 캐비티 내부 유동의 주기는 $5.061\mu s$ 의 두 배인 $10.122\mu s$ 이다. $10.122\mu s$ 를 주파수로 환산하면 $98.795kHz$ 가 된다. 한편, 그림 39는 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 수치해석으로부터 계산한 오리피스 출

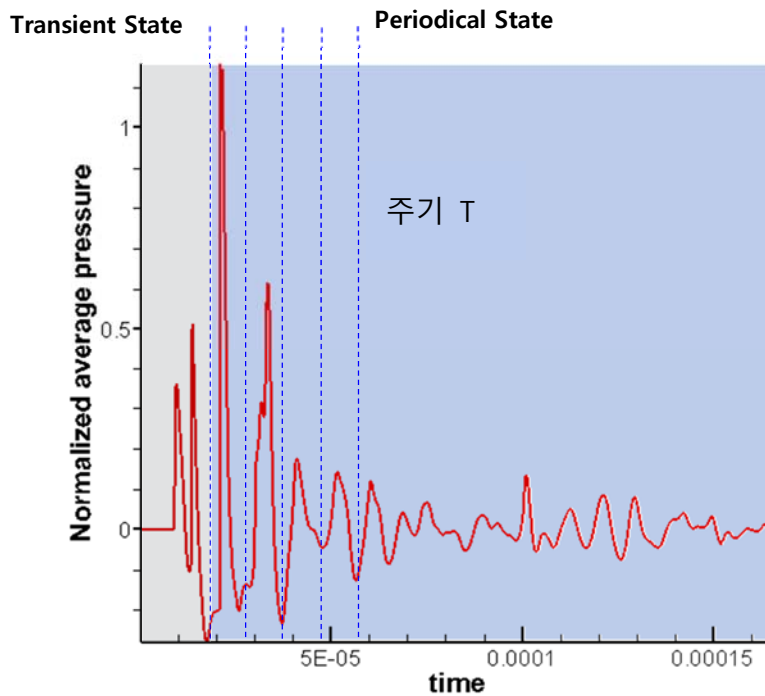


그림 39. CFD로부터 얻은 오리피스 출구 물리량 (normalized average pressure)

구 추력의 FFT 결과이다. 4.5.2 절에서 수행한 CFD 에서 얻은 것 아니라 4.3 절에서 수행한 CFD 에서 얻은 값이다. 4.3 절에서 수행한 CFD 는 캐비티, converging section, orifice 와 외부 유동을 모두 해석한 것이다. 그림 40 의 FFT 결과는 스파크 제트 플라즈마 액추에이터의 주파수가 $98.913kHz$ 임을 보여주고

있는데 이는 모델링에서 도출된 주파수인 98.795kHz 와 매우 유사하다.

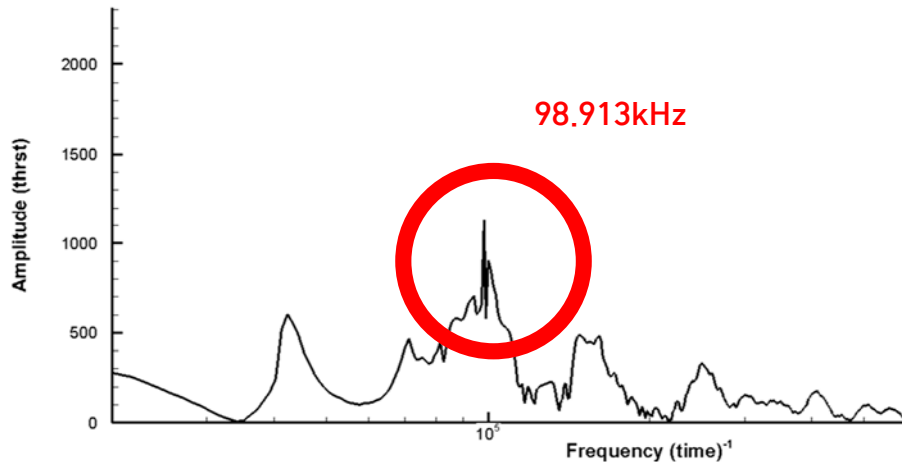


그림 40. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 Thrust FFT 결과

4.5.5 Jet boundary condition 모델

최종적으로 jet boundary condition 모델을 도출하기 위해서는 4.5.3 절에서 얻은 스파크 제트의 주기, transient 구간에서의 CFD 결과, single period 동안의 CFD 결과가 필요하다. CFD 에서 도출되는 결과는 오리피스 출구에서의 압력, 온도, 속도 u, v, w 의 오리피스 방향에 대한 프로파일이다. 압력과 온도만 있으면 평형 상태에서 모든 thermodynamic property 들을 계산할 수 있기 때문에 압력과 온도만 추출하였고 속도는 thermodynamic property 와는 독립적인 물리량이기 때문에 따로 추출하였다. 그리고 마지막으로 제트에 의한 유량 감소를 고려한 진폭 감쇄율이 필요하다. 그림 41 은 그림 39 의 초반 시간대를 확대한 그림이다. CFD 로부터 $t=0$ 에서 $t = t_{start} + 2T$ 까지의 물리량을 얻은 다음 $[t_{start} + T, t_{start} + 2T]$ 구간의 물리량을 주기 T 를 가지는 주기 함수로 이어 붙여 extrapolation 한다. 이 때 extrapolation 하는 과정에서 진폭 감쇄율

$\gamma(m) = m^{0.1}e^{-0.052665m^{1.3}}$, ($m \in I$)를 적용한다. 그림 42 는 이 과정을 간략하게 보여주는 예시이다.

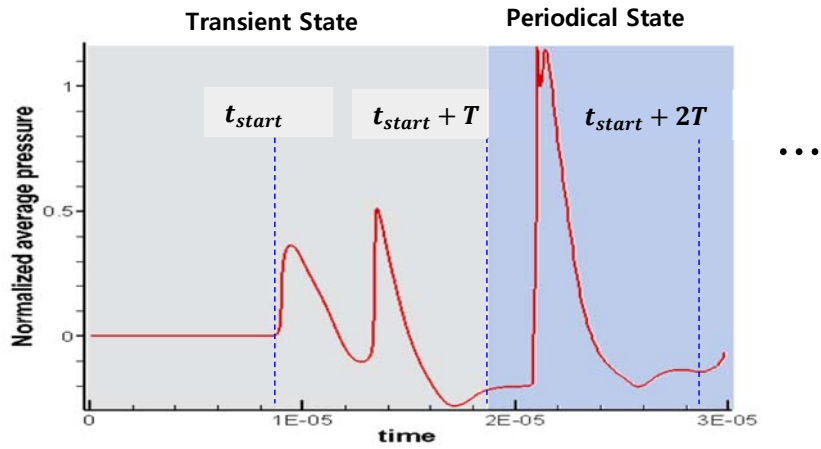


그림 41. 오리피스 출구 물리량 초반부 확대

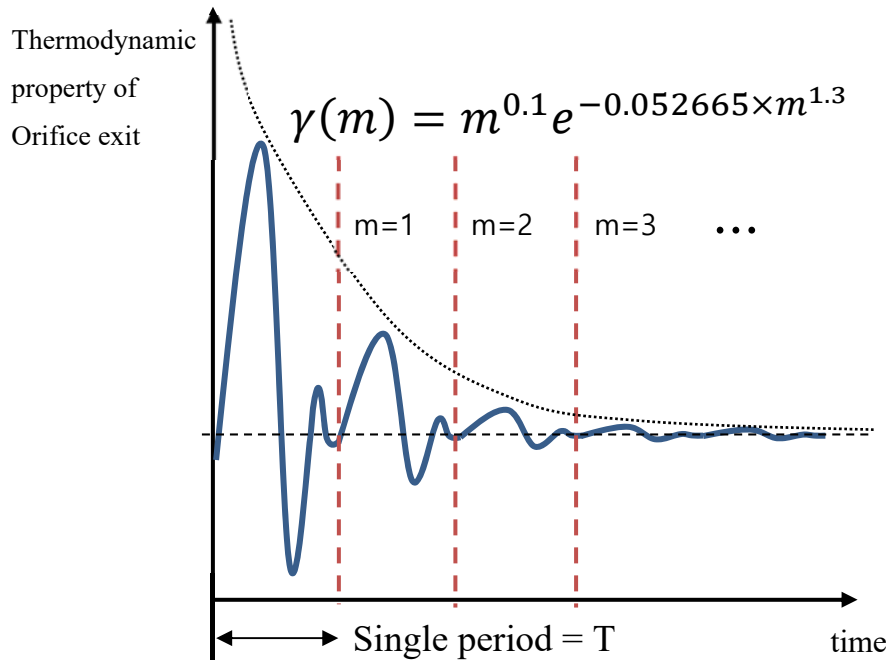


그림 42. Jet boundary condition 도출 과정 예시

한 편, converging section 이 시작하는 부분에서 CFD 결과와 모델링 결과를 비교해보자. 그림 43- 45 를 보면 converging section 초입 부근에서 압력, 밀도,

속력은 CFD 와 모델의 결과가 거의 유사하다. 4.3 절에서 수행한 CFD 결과이므로 성긴 격자에 의한 수치점성을 감안하면 잘 일치하는 것으로 생각할 수 있다. 다만, $8\mu\text{s}$ 근방에서 CFD 와 모델의 차이가 발생하는데 이는 z 축으로 중첩되는 충격파에 의한 영향이 모델에서는 고려되지 못했기 때문이다. 결론적으로 중첩 영향이 발생하기 전까지는 converging section 초입 부근에서 유동 값은 유사하다. 이것으로 개발된 1D 모델링의 정확성을 어느정도 확인할 수 있다.

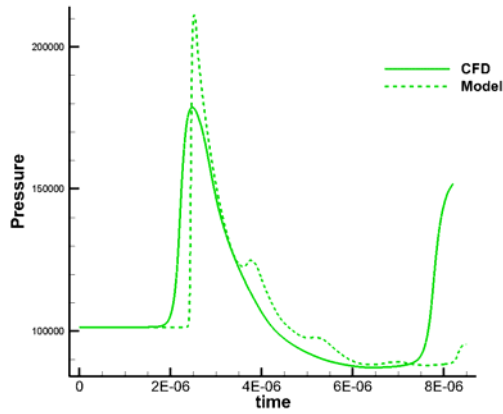


그림 43. Converging section 초입 부분에서의 압력

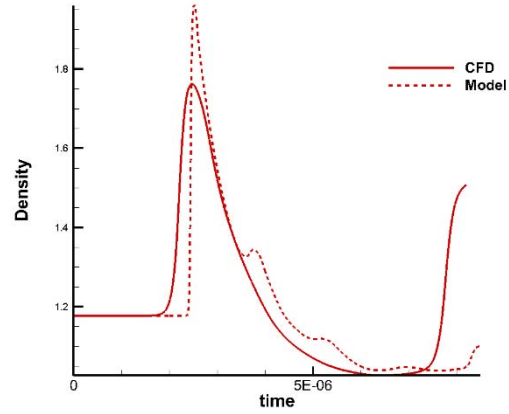


그림 44. Converging section 초입 부분에서의 밀도

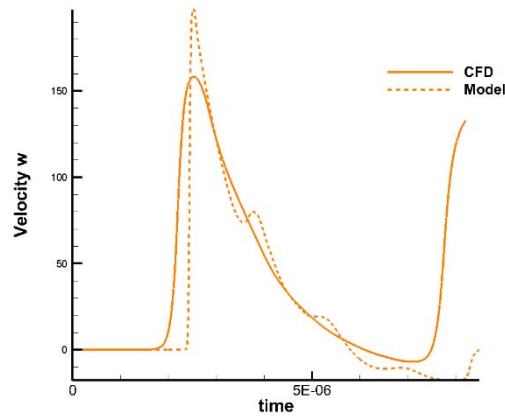


그림 45. Converging section 초입 부분에서의 속력

그러나 오리피스 출구에서는 CFD 결과와 모델링 결과는 쉽게 예상 가능하듯이 잘 일치하지 않는다. 유동이 오리피스에 도달하기 위해서는 converging section 을 거쳐야 하는데 converging section 은 유동을 매우 복잡하게 만드는 구간이므로 모델링하는 것이 불가능하다. Nozzle 유동으로 생각하여 quasi 1-D 나 1-D 노즐 유동으로 근사할 수도 있지만 기본적으로 nozzle 모델은 반지름 방향으로 프로파일이 없고 균일한 경우에 사용할 수 있으므로 sparkjet

과 같이 복잡한 충격파에 의해 지배받는 유동현상에는 사용할 수 없다. 따라서 orifice 출구에서의 유동 프로파일은 앞서 언급했듯이 CFD 에서 도출된 결과를 사용한다.

이와 같은 모델링 과정을 모두 거쳐 도출된 jet boundary condition 을 wall boundary condition 으로 부여한 뒤 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 수치해석을 수행하였다. 그림 9 에서 제시된 격자에서 캐비티, converging section, 오리피스를 제외한 외부 유동 영역만 존재하는 격자를 사용하였다. 그림 46 은 jet boundary condition 모델을 이용하여 스파크 제트 플라즈마 액추에이터를 수치

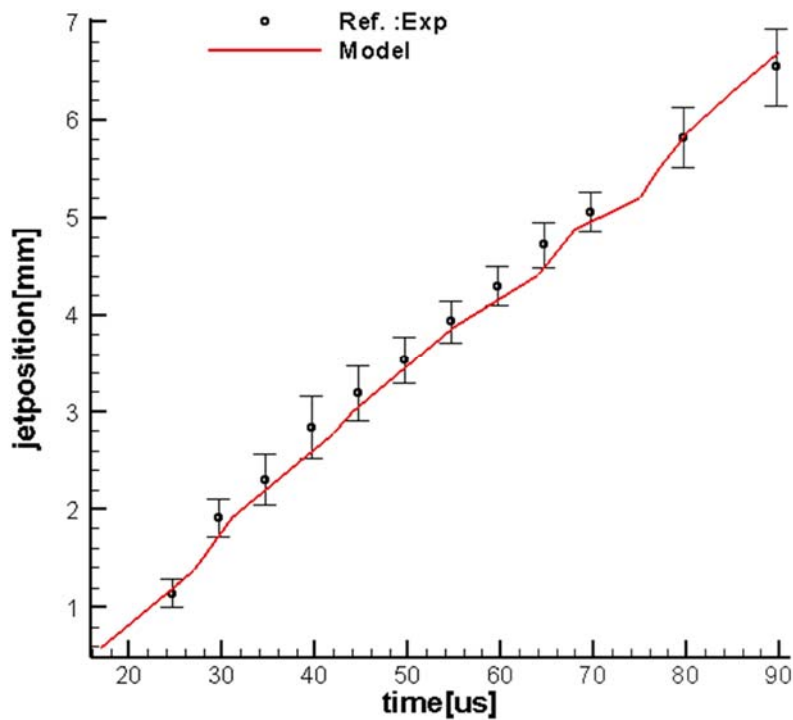


그림 46. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 제트 위치 비교

해석한 결과이며 오리피스에서 분출되는 제트 위치에 대해 실험과 비교한 것

이다. 그림 47 은 스파크 제트 액추에이터의 단일 펄스가 외부 유동장에 주입하는 총 모멘텀인 충격량에 대해 CFD 와 모델의 결과를 비교한 것이다. 제트

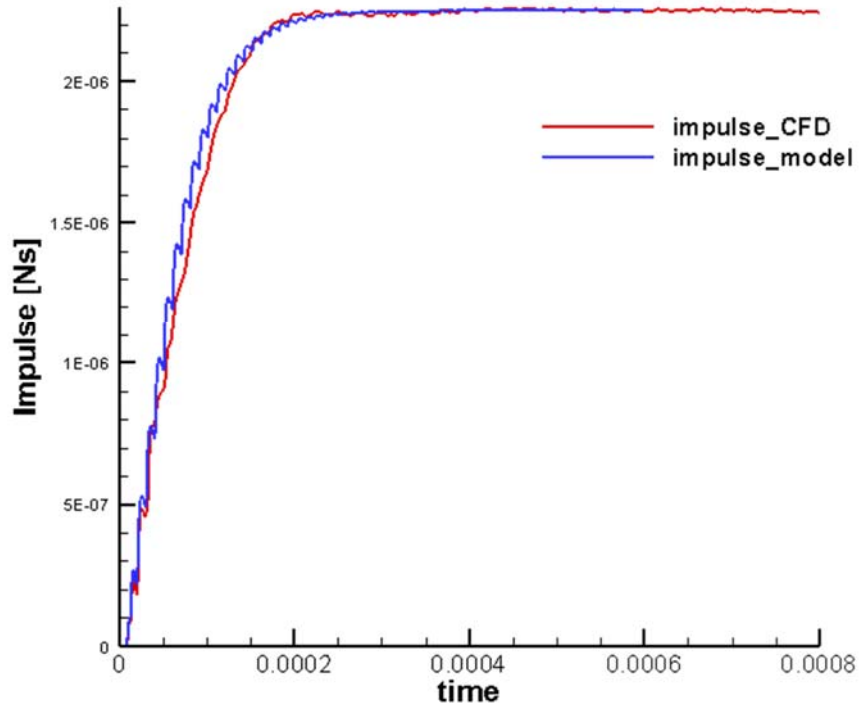


그림 47. 스파크 제트 플라즈마 액추에이터 충격량 비교

의 위치와 충격량의 크기가 실험 및 CFD 결과와 잘 일치하는 것으로 보아 스파크 제트 액추에이터의 단일 펄스 모델이 외부 유동장을 제어할 수 있는 영역과 강도를 잘 모사했다고 생각할 수 있다.

5. 결론

.스파크 제트 플라즈마 액추에이터 유동 해석 모델을 개발하였다. 추력을

발생시키는 주요 원인인 캐비티 내부의 충격과 거동을 모사하고 주파수를 예측하였다. 오리피스 출구에서의 jet boundary condition 을 도출해내기 위해 모델링에서 계산된 오리피스 출구 유동 값에 CFD 에서 계산된 오리피스 출구의 반지름 방향 유동 변수 프로파일을 차용하였다. 액츄에이터가 구동되는 전체 시간이 아닌 캐비티 내부 유동의 한 주기 동안만 CFD 결과를 차용하고 나머지 시간대는 지수 스케일로 진폭이 감소하는 주기함수로 extrapolating 함으로써 CFD 시뮬레이션에 소모되는 계산 비용을 줄일 수 있었다. 이렇게 도출된 jet boundary condition 모델을 wall boundary 로 적용하여 수치해석 한 결과, 기존의 실험 및 CFD 수치해석 결과와 잘 맞는 결과를 보여주었다.

6. 참고문헌

- [1] Gordon, Sanford, and Bonnie J. McBride. "Computer program for calculation of complex chemical equilibrium compositions and applications." Vol. 1. National Aeronautics and Space Administration, Office of Management, Scientific and Technical Information Program, 1994.
- [2] Srinivasan, S., Tannehill, L.C. and Weilmuenster K.J., "Simplified Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air," NASA RP-1181, Aug. 1987.
- [3] Laurendeau, F., Chedevergne, F., and Casalis, G. "Transient ejection phase modeling of a Plasma Synthetic Jet actuator," *Physics of Fluids* Vol. 26, No. 12, 2014.
- [4] Sary, G., Dufour, G., Rogier, F., and Kourtzanidis, K. "Modeling and parametric study of a plasma synthetic jet for flow control," *AIAA Journal* Vol. 52, No. 8, 2014, pp. 1591-1603.
- [5] Dufour, G., Hardy, P., Quint, G., and Rogier, F. "Physics and models for plasma synthetic jets," *International Journal of Aerodynamics* Vol. 3, No. 1-2-3, 2013, pp. 47-70.
- [6] Kim, Kyu Hong, Chongam Kim, and Oh-Hyun Rho. "Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme." *Journal of Computational Physics* 174.1 (2001): 38-80.
- [7] Narayanaswamy, Venkateswaran, Laxminarayan L. Raja, and Noel T. Clemens. "Characterization of a high-frequency pulsed-plasma jet actuator for supersonic flow

control." AIAA journal 48.2 (2010): 297-305.

Abstract

In the present study, a model of spark jet plasma actuator which is a kind of active actuator was developed for flow control analysis. Considerable difference between the characteristic time of arc plasma which drives spark jet plasma actuator and that of flow causes enormously expensive computational cost. To reduce this computational cost, analytic model which can derive jet boundary condition of spark jet plasma actuator is needed. Considering geometric symmetry of actuator and geometric features of various shocks which propagates in the actuator, governing equation is transformed and jet boundary condition is derived from the transformed governing equation. Moreover, CFD simulation is conducted by implementing derived jet boundary condition as wall boundary condition. The result of CFD simulation is compared with experimental results of reference and makes good agreement with the experimental results. Since spark jet plasma actuator is high temperature and high pressure flow, it is assumed as equilibrium flow under the condition of local thermal equilibrium. To calculate thermodynamic properties at equilibrium state, CEA open source of NASA is used.

Keywords : Spark jet plasma actuator, Active actuator, Jet boundary condition modeling, equilibrium flow

Student Number : 2016 – 20741